

14. 'n Vrou wil graag haar eie besigheid begin. Sy leen R250 000 teen 'n rentekoers van 10% per jaar, maandeliks saamgestel, vir 'n tydperk van 5 jaar. Na 2 jaar betaal sy R120 000 aan die bank terug en na nog 'n jaar 'n verdere bedrag van R80 000. Watter bedrag sal sy aan die einde van die 5 jaar aan die bank moet terugbetaal?
15. Leonard belê R20 000 teen 12% rente per jaar, maandeliks saamgestel. Na 3 jaar verander die rentekoers na 14% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Wat sal die waarde van sy belegging wees na 5 jaar?
16. As die nominale rentekoers 12% per jaar is, maandeliks saamgestel, wat is die effektiewe rentekoers?
17. 'n Sakeman kan sy geld by Bank A belê teen 13% per jaar, maandeliks saamgestel, en by bank B teen 15% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Wat sal die effektiewe rentekoers in elke geval wees en watter bank bied dus die beste belegging?
18. As die effektiewe rentekoers 13,8% op 'n belegging is, wat is die nominale rentekoers indien rente maandeliks saamgestel is?

FUNKSIES EN GRAFIEKE

1. Die Reguit lyn met die vorm $y = ax + q$

Die grafiek $y = ax + q$ is reeds in Graad 9 en 10 behandel. Hersien funksies en grafieke in die Graad 10 handleiding.

2 Die Parabool met die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ of $y = ax^2 + bx + c$

In Graad 10 het jy slegs die grafiek geteken van die parabool met vergelyking $y = ax^2 + q$. Die parabool was simmetries om die y -as.

Die invloed van a : a is 'n vertikale uitrekking of inkrimping van die grafiek.

As a positief is, het die funksie 'n minimum waarde ($a > 0$).

As a negatief is, het die funksie 'n maksimum waarde ($a < 0$).

Die invloed van p en q

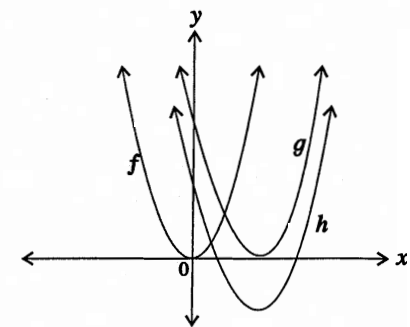
Die funksie $f(x) = a(x + p)^2 + q$ is simmetries om die lyn $x = -p$ en die koördinate van die draaipunt is $(-p; q)$.

Die figuur toon die grafieke

$$\text{van } f(x) = x^2,$$

$$g(x) = (x - 2)^2 \text{ en}$$

$$h(x) = (x - 2)^2 - 2$$



Dus : p is die **horisontale skuif** van die grafiek p eenhede links of regs en q is die **vertikale skuif** van die grafiek q eenhede op of af.

2.1 Die skets van die parabool

Om die parabool te teken, moet die volgende bereken word

Die x-afsnit : Stel $y = 0$ en los die vergelyking op.

Die y-afsnit : Stel $x = 0$ (dit is altyd die c -waarde as die vergelyking in die vorm $y = ax^2 + bx + c$ is.)

Die simmetrie-as en die koördinate van die draaipunt

Dit kan op twee verskillende maniere bereken word

Vergelyking van simmetrie-as : $x = -\frac{b}{2a}$

Dit is ook die **x-koördinaat** van die draaipunt.

Om die **y-koördinaat** van die draaipunt te vind, stel hierdie x -waarde in die vergelyking.

of

Skryf die vergelyking in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ deur die kwadraat te voltooi.

Vergelyking van die simmetrie-as : $x = -p$

Die **koördinate van die draaipunt** is $(-p; q)$ $\therefore x = -p; y = q$

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $y = 2x^2 - 6x - 8$

Oplossing

y-afsnit : $y = -8$ [Stel $x = 0 \rightarrow y = 2(0)^2 - 6(0) - 8 = -8$]

x-afsnitte : Stel $y = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x - 8 &= 0 \\ \therefore x^2 - 3x - 4 &= 0 & [\text{Deel deur 2}] \\ \therefore (x - 4)(x + 1) &= 0 \\ \therefore x = 4 \text{ of } x = -1. \end{aligned}$$

Draaipunt : $x = -\frac{b}{2a}$ [$a = 2, b = -6$]

$$\therefore x = -\frac{-6}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Stel nou $x = \frac{3}{2}$ in vergelyking :

$$\begin{aligned} \therefore y &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) - 8 \\ &= -12\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \therefore \text{Draaipunt} = \left(\frac{3}{2}; -12\frac{1}{2}\right)$$

of

Skryf $y = 2x^2 - 6x - 8$ in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ deur die kwadraat te voltooi.

$$y = 2x^2 - 6x - 8$$

$$\therefore y = 2(x^2 - 3x - 4) \quad [\text{Deel deur 2}]$$

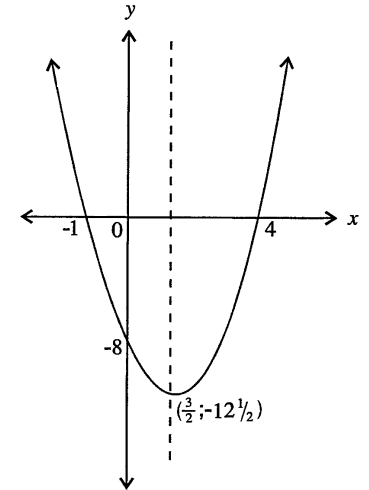
$$\therefore y = 2\left(x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\right) \quad [\text{Tel by en trek af : } \left(-\frac{3}{2}\right)^2]$$

$$\therefore y = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4\right] \quad [\text{Faktoriseer eerste 3 terme en kwadreer } -\left(-\frac{3}{2}\right)^2]$$

$$\therefore y = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] \quad [\text{Tel laaste twee terme bymekaar}]$$

$$\therefore y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} \quad [\text{Maal } -\frac{25}{4} \text{ met 2 voor hakie } \therefore 2\left(-\frac{25}{4}\right) = -\frac{25}{2}]$$

$$\therefore \text{Draaipunt se koördinate : } \left(\frac{3}{2}; -\frac{25}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; -12\frac{1}{2}\right)$$



Voorbeeld 2

Maak 'n netjiese sketsgrafiek van $y = -2(x - 1)^2 + 8$

Oplossing

Vergelyking is reeds in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$

$\therefore$ Koördinate van Draaipunt: $(-p; q) \therefore (-(-1); 8) = (1; 8)$

Simmetrie-as: $x = 1$

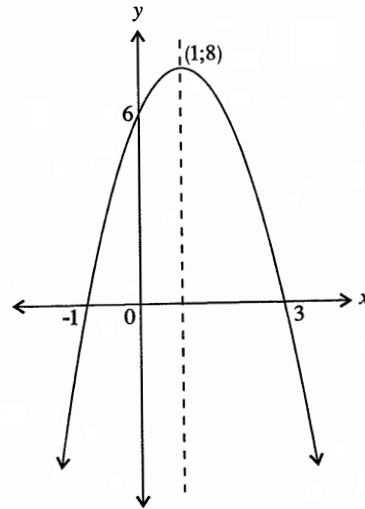
Om die x- en y-afsnitte te kry, vereenvoudig eers die vergelyking.

$$\begin{aligned} y &= -2(x - 1)^2 + 8 \\ \therefore y &= -2(x^2 - 2x + 1) + 8 \\ \therefore y &= -2x^2 + 4x - 2 + 8 \\ \therefore y &= -2x^2 + 4x + 6 \end{aligned}$$

y-afsnit : $y = 6$

x-afsnit : Stel $y = 0$

$$\begin{aligned} \therefore -2x^2 + 4x + 6 &= 0 \\ \therefore x^2 - 2x - 3 &= 0 \quad [\text{Deel deur } -2.] \\ \therefore (x - 3)(x + 1) &= 0 \\ \therefore x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 &= 0 \\ \therefore x = 3 \text{ of } x = -1 \end{aligned}$$

**2.2 Bepaling van die vergelyking van die parabool**

Wanneer jy gevra word om die vergelyking van die parabool te vind, word een van die volgende vergelykings altyd gebruik :

Wortels en nog 'n punt word gegee : $y = a(x - 1\text{ste wortel})(x - 2\text{de wortel})$.

Draaipunt en nog 'n punt word gegee : $y = a(x + p)^2 + q$.

Voorbeeld 3

Die figuur toon die grafiek

van $y = ax^2 + bx + c$.

Bereken die waardes van a, b en c .

Oplossing

Wortels word gegee

$$y = a(x - 1\text{ste wortel})(x - 2\text{de wortel})$$

$$\therefore y = a(x - 2)(x - (-4)) \quad [\text{Wortels : } 2 \text{ en } -4.]$$

$$\therefore y = a(x - 2)(x + 4)$$

$$\therefore 4 = a(0 - 2)(0 + 4)$$

$[(0; 4) \text{ is 'n punt op die grafiek. Vervang nou } x \text{ met } 0 \text{ en } y \text{ met } 4 \text{ en bereken } a]$

$$\therefore 4 = a(-2)(4)$$

$$\therefore 4 = -8a$$

$$\therefore a = \frac{4}{-8}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

Vervang nou a met $(-\frac{1}{2})$ in $y = a(x - 2)(x + 4)$ en vereenvoudig.

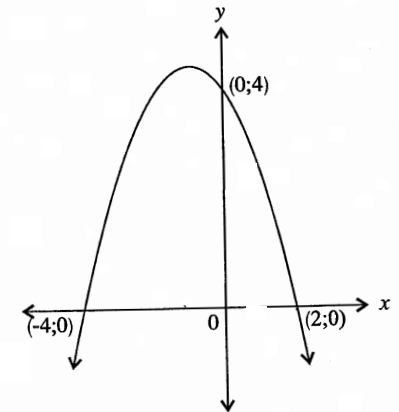
$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x - 2)(x + 4)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x - 2x - 8)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 8)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$$

$$\underline{a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = 4}$$



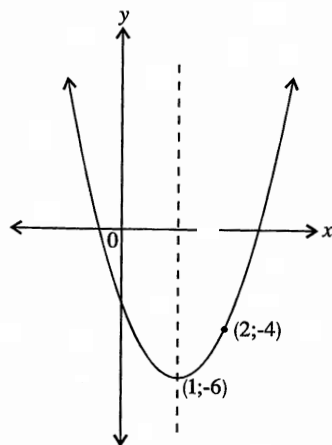
Voorbeeld 4

In die figuur is

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Bereken die waardes

van a, b en c .



Oplossing

Koördinate van draaipunt : $(1; -6)$

$$\therefore q = -6 \quad [\text{Koördinate van draaipunt : } (-p; q)]$$

$$\therefore p = -1 \quad [\text{Let op : Koördinate van draaipunt : } (-p; q) \\ \therefore -p = 1 \quad \therefore p = -1]$$

Die draaipunt word gegee $\rightarrow y = a(x + p)^2 + q$

Vervang p met -1 en q met -6 .

$$\begin{aligned} \therefore y &= a(x - 1)^2 - 6 \\ \therefore -4 &= a(2 - 1)^2 - 6 \quad [\text{Om } a \text{ te bereken, vervang } x \text{ met } 2 \text{ en } y \text{ met } -4] \\ \therefore -4 &= a(1)^2 - 6 \\ \therefore -4 + 6 &= a \\ \therefore 2 &= a \end{aligned}$$

Vervang nou a met 2 in $y = a(x - 1)^2 - 6$.

$$\begin{aligned} \therefore y &= 2(x - 1)^2 - 6 \\ \therefore y &= 2(x^2 - 2x + 1) - 6 \\ \therefore y &= 2x^2 - 4x + 2 - 6 \\ \therefore y &= 2x^2 - 4x - 4. \end{aligned}$$

$$\underline{a = 2, b = -4, c = -4}$$

3. Die hiperbool met die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$

Die invloed van a

Indien $a > 0$ (positief is) lê die grafiek in die eerste en die derde kwadrant.
Indien $a < 0$ (negatief is) lê die grafiek in die tweede en die vierde kwadrant.
 a is die vertikale uitrekking of inkrumping van die grafiek.

Die invloed van q

Die vergelyking van die **horisontale asimptoot** van die hiperbool is $y = q$.

q is die **vertikale skuif** van die grafiek q eenhede op of af.

Die invloed van p

Deling deur nul is ongedefinieerd en daarom is $x + p \neq 0$.

Die vergelyking van die **vertikale asimptoot** is dus $x = -p$ ($x + p = 0$ as $x = -p$).

p is die **horisontale skuif** van die grafiek p eenhede na links of regs.

3.1 Die skets van die hiperbool

Om die hiperbool te teken, moet die volgende bereken word :

Die horisontale asimptoot : Die horisontale asimptoot is die lyn $y = q$.

Die vertikale asimptoot : Die vertikale asimptoot is die lyn $x = -p$.

Die x-afsnit : Stel $y = 0$ en los die vergelyking op.

Die y-afsnit : Stel $x = 0$ en los die vergelyking op.

As a positief is $\rightarrow$ grafiek in kwadrant 1 en 3.

As a negatief is $\rightarrow$ grafiek in kwadrant 2 en 4.

Voorbeeld 5

Skets die grafiek van $y = \frac{12}{x+1} + 2$

Oplossing

Horizontale asimptoot : $y = 2$

Vertikale asimptoot : $x = -1$ [Stel $x + 1 = 0$, $\therefore x = -1$]

y-afsnit : Stel $x = 0$

$$\therefore y = \frac{12}{0+1} + 2$$

$$\therefore y = 12 + 2$$

$$\therefore y = 14$$

x-afsnit : Stel $y = 0$

$$\therefore \frac{12}{x+1} + 2 = 0$$

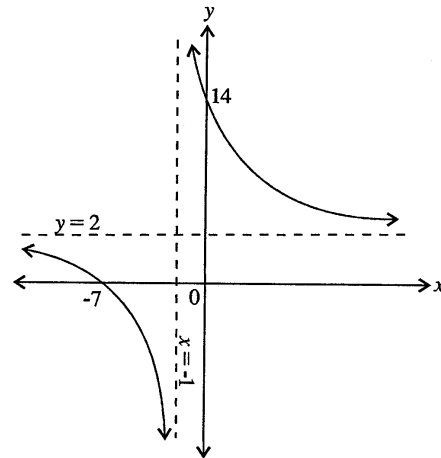
$$\therefore 12 + 2(x+1) = 0 \quad [\text{Maal met } (x+1)]$$

$$\therefore 12 + 2x + 2 = 0$$

$$\therefore 2x = -14$$

$$\therefore x = -7$$

$a > 0$, grafiek in 1ste en 3de kwadrant.

Voorbeeld 6

Skets die grafiek van $y = \frac{-8}{x-2} - 1$

Oplossing

Horizontale asimptoot : $y = -1$

Vertikale asimptoot : $x = 2$

y-afsnit : $x = 0$

$$\therefore y = \frac{-8}{0-2} - 1$$

$$\therefore y = \frac{-8}{-2} - 1$$

$$\therefore y = 4 - 1$$

$$\therefore y = 3$$

x-afsnit : $y = 0$

$$\therefore \frac{-8}{x-2} - 1 = 0$$

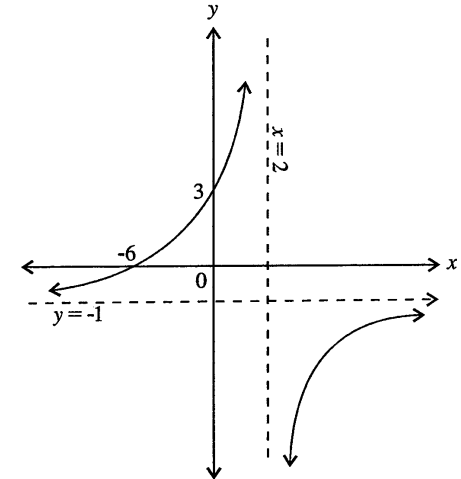
$$\therefore -8 - (x-2) = 0$$

$$\therefore -8 - x + 2 = 0$$

$$\therefore -x = 6$$

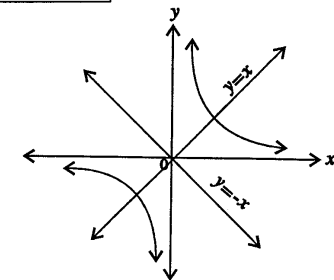
$$\therefore x = -6$$

$a < 0$, dus grafiek in 2de en 4de kwadrant.

**3.2 Die simmetrie-as van die hiperbool**

Die funksie $f(x) = \frac{a}{x}$ is simmetries om die lyn $y = x$ en die lyn $y = -x$.

Die vergelyking van die simmetrie-as is dus $y = x$ of $y = -x$.

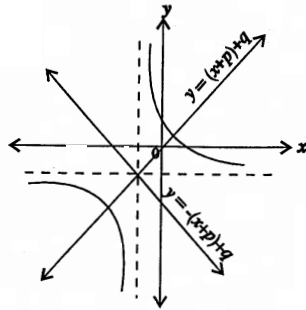


Die vergelyking van die

simmetrie-as van die

funksie $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ is

$y = (x+p) + q$ of $y = -(x+p) + q$.



Voorbeeld 7

Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van

$$7.1 \quad y = \frac{12}{x+1} + 2$$

$$7.2 \quad y = \frac{-8}{x-2} - 1$$

Oplossing

7.1 *Vergelyking van simmetrie-as*

$$y = (x+p) + q \text{ of } y = -(x+p) + q$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= (x+1) + 2 & \text{of} & & y &= -(x+1) + 2 \\ \therefore y &= x+3 & & & \therefore y &= -x-1+2 \\ & & & & \therefore y &= -x+1 \end{aligned}$$

$\therefore$ *Vergelyking van simmetrie-as* : $y = x+3$ of $y = -x+1$

$$7.2 \quad y = (x+p) + q \text{ of } y = -(x+p) + q$$

$$\begin{aligned} y &= (x-2) - 1 & \text{of} & & y &= -(x-2) - 1 \\ \therefore y &= x-2-1 & & & \therefore y &= -x+2-1 \\ \therefore y &= x-3 & & & \therefore y &= -x+1 \end{aligned}$$

$\therefore y = x-3$ of $y = -x+1$

3.3 Bepaling van die vergelyking van die hiperbool

Voorbeeld 8

Die skets verteenwoordig die

grafiek van $y = \frac{a}{x+p} + q$.

Vind die waardes van a , p en q .

Oplossing

Vertikale asimptoot : $x = -2$

$$\therefore -p = -2 \quad [\text{Vertikale asimptoot : } x = -p]$$

$$\therefore p = 2$$

Horisontale asimptoot : $y = 1$

$$\therefore q = 1 \quad [\text{Horisontale asimptoot : } y = q]$$

Stel $p = 2$ en $q = 1$ in vergelyking .

$$\therefore y = \frac{a}{x+2} + 1$$

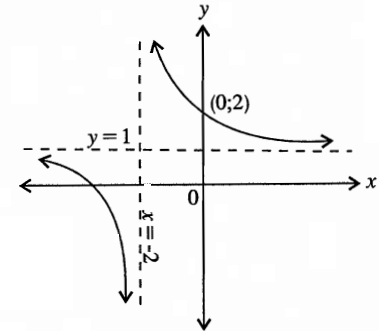
$$\therefore 2 = \frac{a}{0+2} + 1 \quad [\text{Vervang } x \text{ met } 0 \text{ en } y \text{ met } 2 \text{ en bereken } a]$$

$$\therefore 2(2) = a + 2 \quad [\text{Maal met } 2]$$

$$\therefore 4 - 2 = a$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \underline{a = 2 ; p = 2 ; q = 1}$$



4. Die eksponensiële funksie met die vorm $y = a \cdot b^{x+p} + q$

Die invloed van a : a is die vertikale uitrekking of inkrimping van die grafiek.

Die invloed van die grondtal, b : Die funksie is stygend indien die $b > 1$ en dalend indien $0 < b < 1$.

Die invloed van q : In graad 10 het jy reeds gesien dat q die **vertikale skuif** van die grafiek is. Die vergelyking van die **horisontale asimptoot** is $y = q$. Die grafiek van die eksponensiële funksie het nie 'n vertikale asimptoot nie.

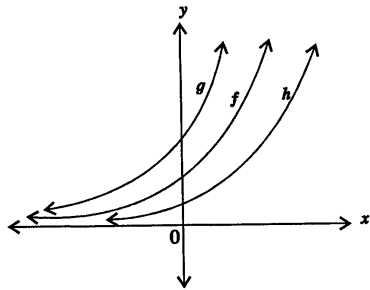
Die invloed van p

Die skets toon die grafieke van

$$f(x) = 2^x,$$

$$g(x) = 2^{x+1} \text{ en}$$

$$h(x) = 2^{x-1}.$$



Dus is p 'n **horisontale skuif** van die grafiek p eenhede. Indien $p > 0$, skuif die grafiek na links en indien $p < 0$, skuif die grafiek na regs.

4.1 Die skets van die grafiek van die eksponensiële funksie

Om die grafiek van die eksponensiële funksie te teken, bereken

Die horisontale asimptoot : Die horisontale asimptoot is altyd $y = q$.

Die y -afsnit : Stel $x = 0$ en los die vergelyking op.

Die x -afsnit : Stel $y = 0$ en los die vergelyking op. Let op : As $q > 0$ sal daar geen x -afsnit wees nie.

As die grondtal > 1 sal die grafiek stygend wees en as die grondtal < 1 is die grafiek dalend.

Voorbeeld 9

Skets die grafiek van $y = 3^{x+1} - 1$

Oplossing

Horisontale asimptoot : $y = -1$

y -afsnit : Stel $x = 0$

$$\therefore y = 3^{0+1} - 1$$

$$\therefore y = 3 - 1$$

$$\therefore y = 2$$

x -afsnit : $y = 0$

$$\therefore 3^{x+1} - 1 = 0$$

$$\therefore 3^{x+1} = 1$$

$$\therefore 3^{x+1} = 3^0$$

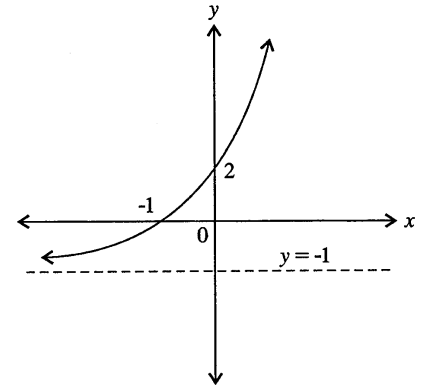
$$\therefore x + 1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

[Onthou : $1 = 3^0$]

[Grondtalle is gelyk, stel eksponente gelyk aan mekaar]

Grondtal $> 1 \quad \therefore$ funksie is stygend.



Voorbeeld 10

Maak 'n netjiese sketsgrafiek van $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1$.

Oplossing :

Horisontale asimptoot : $y = 1$

y -afsnit : Stel $x = 0$

$$\therefore y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} + 1$$

$$\therefore y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 1$$

$$\therefore y = 2(3) + 1 \quad \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3\right]$$

$$\therefore y = 7$$

x-afsnit : Stel $y = 0$

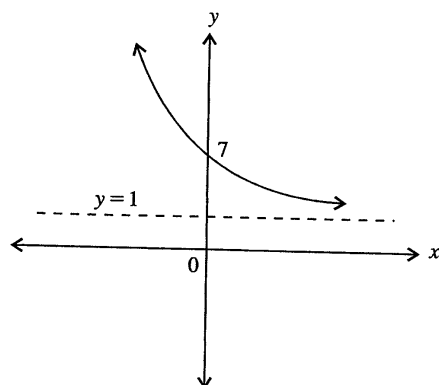
$$\therefore 2\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1 = 0$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ geen oplossing

Die horisontale asimptoot : $y > 0 \quad \therefore$ geen x-afsnit.

Grondtal $< 1 \quad \therefore$ funksie is dalend.



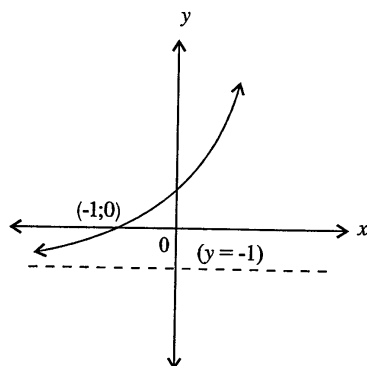
4.2 Bepaling van die vergelyking van die grafiek

Voorbeeld 11

Die diagram toon die

grafiek van $y = 2^{x+p} + q$

Bereken die waardes van p en q .



Oplossing

Horisontale asimptoot : $y = -1$

$\therefore q = -1$ [Horisontale asimptoot altyd $y = q$]

Om p te bereken, vervang q met -1 en stel $(-1; 0)$ in die vergelyking.

$$\therefore 0 = 2^{-1+p} - 1$$

$$\therefore 1 = 2^{-1+p}$$

$$\therefore 2^0 = 2^{-1+p} \quad [\text{Kry grondtalle gelyk} \rightarrow 2^0 = 1]$$

$$\therefore 0 = -1 + p \quad [\text{Grondtalle gelyk, stel eksponente gelyk}]$$

$$\therefore p = 1$$

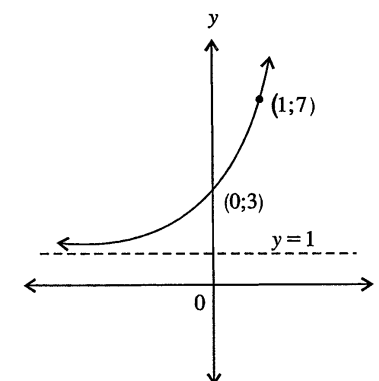
$$\therefore p = 1 ; q = -1$$

Voorbeeld 12

Die figuur toon die

grafiek van $y = a \cdot b^x + q$.

Bepaal die vergelyking van die grafiek.



Oplossing

Horisontale asimptoot : $y = 1$

$\therefore q = 1$ [Horisontale asimptoot altyd $y = q$]

$\therefore y = a \cdot b^x + 1$ [Vervang q met 1]

Twee punte op grafiek word gegee $\rightarrow (0; 3)$ en $(1; 7)$.

Stel eers $(0; 3)$ in vergelyking

$$\therefore 3 = a(b)^0 + 1 \quad [x = 0; y = 3]$$

$$\therefore 3 - 1 = a(1) \quad [\text{Onthou } b^0 = 1]$$

$$\therefore 2 = a$$

Vervang nou a met 2 in $y = a \cdot b^x + 1$ en stel $(1; 7)$ in vergelyking.

$$\therefore y = 2b^x + 1$$

$$\therefore 7 = 2(b)^1 + 1 \quad [\text{Stel } x = 1 \text{ en } y = 7]$$

$$\therefore 7 - 1 = 2b$$

$$\therefore 6 = 2b$$

$$\therefore b = 3$$

Vergelyking van grafiek : $y = 2 \cdot 3^x + 1$

5. Translasie van grafieke

Translasie van grafieke beteken dat die bestaande grafiek met 'n sekere aantal eenhede na links of regs en met 'n sekere aantal eenhede op of af getransleer word.

Hier geld die volgende reëls

Die **grafiek** word met p eenhede na **regs** getransleer $\Rightarrow x$ verander na $(x - p)$.

Die **grafiek** word met p eenhede na **links** getransleer $\Rightarrow x$ verander na $(x + p)$.

Die **grafiek** word met q eenhede **op** getransleer $\Rightarrow y$ verander na $(y - q)$.

Die **grafiek** word met q eenhede **af** getransleer $\Rightarrow y$ verander na $(y + q)$.

Indien die grafiek van $y = x^2$ met 2 eenhede na links en 1 eenheid op getransleer word, sal die vergelyking van die nuwe grafiek wees :

$$y - 1 = (x + 2)^2 \quad [2 \text{ na links} \rightarrow x \text{ word } (x + 2); 1 \text{ op} \rightarrow y \text{ word } (y - 1)]$$

$$\therefore y = (x + 2)^2 + 1$$

Die grafiek van $y = (x + 2)^2 + 1$ kan dus geskets word deur die grafiek van $y = x^2$ twee eenhede na links te skuif en een eenheid op.

Voorbeeld 13

In die figuur is $f(x) = x^2$.

$g(x)$ is die translasie van $f(x)$ 2 eenhede na regs en $h(x)$ is die translasie van $f(x)$ 1 eenheid na links en 2 eenhede op.

Bepaal die vergelykings van $g(x)$ en $h(x)$.

Oplossing

$$f(x) = x^2 \\ \therefore y = x^2$$

Vergelyking van $g(x)$

$$y = (x - 2)^2 \quad [\text{Translasie 2 eenhede na regs : } \therefore x \rightarrow x - 2]$$

Vergelyking van $h(x)$

$$y - 2 = (x + 1)^2 \quad [\text{Translasie 1 eenheid na links : } x \rightarrow (x + 1); \\ 2 \text{ eenhede op : } y \rightarrow y - 2]$$

$$\therefore y = (x + 1)^2 + 2$$

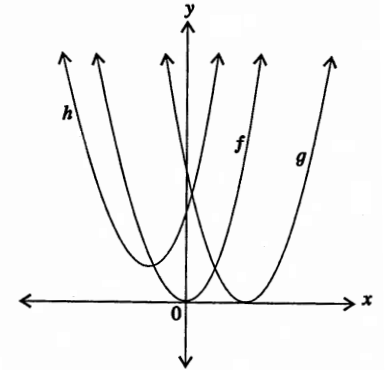
Voorbeeld 14

14.1 Skets die grafiek van $y = x^2 - 2x - 3$.

14.2 Op dieselfde assestelsel, skets die grafiek van $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ deur van translasie gebruik te maak.

Oplossing

14.1 y-afsnit : $y = -3$



x-afsnitte : Stel $y = 0$.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\therefore (x-3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x-3 = 0 \quad \text{of} \quad x+1 = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad \text{of} \quad x = -1$$

Draaipunt

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(1)} = 1$$

Stel $x = 1$ in vergelyking

$$\therefore y = (1)^2 - 2(1) - 3$$

$$= -4$$

Draaipunt (1;-4)

14.2 Draaipunt van $f(x) = (-2;-1)$.

Dus 'n translasie 3 eenhede links en 3 eenhede op.

Skuif grafiek eers 3 eenhede na links.

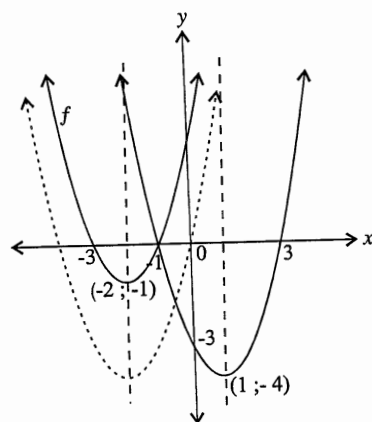
$\therefore$ Draaipunt $(-2;-4)$ en wortels $x = 0$ en $x = -4$.

Skuif nou 3 eenhede op.

$\therefore$ Draaipunt $(-2;-1)$ en wortels $x = -1$ en $x = -3$.

6. Afleidings uit sketsgrafieke

Jy moet in staat wees om sekere afleidings uit sketsgrafieke te maak as die vergelyking van die grafiek gegee word, bv. om koördinate, lengtes van lyne en die snytpunte van grafieke met mekaar te bereken.



Voorbeeld 15

In die skets is $f(x) = x^2 - 4x - 5$ en $g(x) = x + 1$.

15.1 Bereken die lengtes van OA , OB en OC .

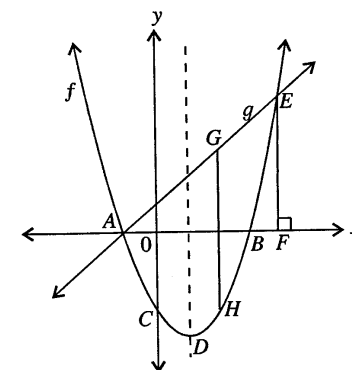
15.2 Bereken die koördinate van D , die draaipunt van $f(x)$.

15.3 Bereken die lengte van EF .

15.4 Bereken die maksimum lengte van GH .

15.5 Wat is die waardeversameling van $f(x)$?

15.6 Gee die koördinate van die draaipunt van $f(x+2)$ en beskryf die translasie wat plaasgevind het.



Oplossing

15.1 Om die lengtes van OA , OB en OC te bereken, moet die koördinate van A , B en C eers bereken word.

A en B is die x -afsnitte, dus stel $y = 0$.

$$\therefore x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\therefore (x-5)(x+1) = 0$$

$$\therefore x-5 = 0 \quad \text{of} \quad x+1 = 0$$

$$\therefore x = 5 \quad \text{of} \quad x = -1 \quad A(-1;0) \quad B(5;0)$$

Koördinate van $C(0;-5)$ [C is y -afsnit $\therefore x = 0$]

$\therefore OA = 1$ eenheid $OB = 5$ eenhede $OC = 5$ eenhede

$$15.2 \text{ Koördinate van Draaipunt : } x = \frac{-b}{2a} \quad \therefore x = \frac{-(-4)}{2(1)}$$

$$\therefore x = \frac{4}{2}$$

$$\therefore x = 2$$

Stel $x = 2$ in vergelyking : $y = (2)^2 - 4(2) - 5$

$$\therefore y = 4 - 8 - 5$$

$$\therefore y = -9$$

$\therefore D(2;-9)$

15.3 EF is ewewydig aan die y -as $\rightarrow$ lengte van $EF = y$ -koördinaat van E .

Bereken eers die x -koördinaat van E . E is die snypunt van $f(x)$ en $g(x)$.

Stel $f(x) = g(x)$ en los die vergelyking op.

$$\begin{aligned}\therefore x^2 - 4x - 5 &= x + 1 & [f(x) = x^2 - 4x - 5 \text{ en } g(x) = x + 1] \\ \therefore x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ \therefore (x - 6)(x + 1) &= 0 \\ \therefore x = 6 &\text{ of } x = -1 & \text{maar } x > 0 \text{ by } E \quad \therefore \text{By } E : x = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Stel } x = 6 \text{ in } g(x) : y &= x + 1 \\ \therefore y &= 6 + 1 \\ \therefore y &= 7\end{aligned}$$

$$\therefore E(6;7)$$

$$\therefore \text{Lengte van } EF = 7 \text{ eenhede}$$

15.4 GH is die verskil tussen $g(x)$ en $f(x)$.

$$\begin{aligned}\therefore GH &= g(x) - f(x) \\ \therefore GH &= x + 1 - (x^2 - 4x - 5) \\ \therefore GH &= x + 1 - x^2 + 4x + 5 \\ \therefore GH &= -x^2 + 5x + 6 & [\text{Voltooi nou die kwadraat.}] \\ \therefore GH &= -(x^2 - 5x - 6)\end{aligned}$$

$$\therefore GH = -(x^2 - 5x + (-\frac{5}{2})^2 - (-\frac{5}{2})^2 - 6)$$

$$\therefore GH = -(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} - 6]$$

$$\therefore GH = -(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{49}{4}]$$

$$\therefore GH = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{49}{4} \quad [-\frac{49}{4} \times -1 = \frac{49}{4}]$$

$$\therefore \text{Maksimum lengte van } GH = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

15.5 Waardeversameling is die y -waardes. Die grafiek het 'n draaipunt by $(2; -9)$. Die minimumwaarde is dus -9 .

$$\therefore \text{Waardeversameling} = \{y; y \geq -9, y \in \mathbb{R}\}.$$

15.6 Draaipunt van $f(x+2) = (0; -9)$ [Grafiek skuif 2 eenhede na links]

$$\therefore \text{Translasie van 2 eenhede links.}$$

Voorbeeld 16

In die meegaande skets word die grafieke

$$\text{van } f(x) = -x^2 - 2x + 3 \text{ en } g(x) = \frac{-2}{x+p} + q$$

uitgebeeld. D is die draaipunt van die parabool.

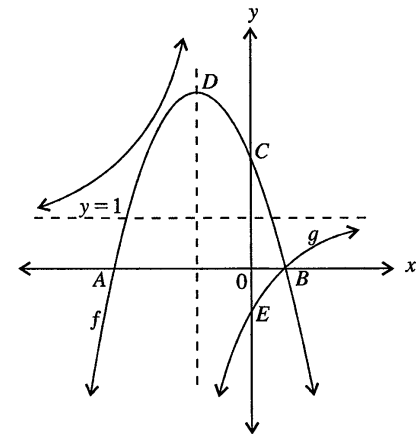
16.1 Bepaal die gemiddelde gradiënt van $f(x)$ tussen $x = 2$ en $x = 3$.

16.2 Bereken die waardes van p en q ?

16.3 Bereken nou die koördinate van E .

16.4 Gee die gebied en terrein van $g(x)$.

16.5 Bereken $g(-5)$



Oplossing

$$16.1 \text{ Gemiddelde gradiënt} = \frac{\text{Verandering in } y}{\text{Verandering in } x} \text{ of } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Bepaal dus eers die waardes van y as $x = 2$ en $x = 3$.

$$\begin{aligned}y &= -(2)^2 - 2(2) + 3 & y &= -(3)^2 - 2(3) + 3 \\ \therefore y &= -5 & \therefore y &= -12\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Gemiddelde gradiënt tussen } (2, -5) \text{ en } (3, -12)$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{-5 - (-12)}{2 - 3} = \frac{-5 + 12}{-1} \\ &= -7\end{aligned}$$

OF

$$\begin{aligned}\text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{f(2) - f(3)}{2 - 3} \\ &= \frac{[-(2)^2 - 2(2) + 3] - [-(3)^2 - 2(3) + 3]}{2 - 3} \\ &= \frac{-5 - (-12)}{-1} \\ &= \frac{-5 + 12}{-1} = -7\end{aligned}$$

16.2 Die vertikale asimptoot gaan deur die draaipunt D.
Bereken dus die x-koördinaat van die draaipunt.

$$\begin{aligned}x &= -\frac{b}{2a} \\ \therefore x &= -\frac{-2}{2(-1)} \\ \therefore x &= -1\end{aligned}$$

$$p = 1 \quad [\text{Vertikale asimptoot : } x = -p, \therefore -p = -1, \therefore p = 1]$$

$$q = 1 \quad [\text{Horisontale asimptoot : } y = q]$$

16.3 E is die y-afsnit van $g(x)$, die hiperbool. $\therefore x = 0$

$$\begin{aligned}y &= \frac{-2}{0+1} + 1 \quad [p = 1 \text{ en } q = 1. \text{ Stel } x = 0] \\ \therefore y &= -2 + 1 \\ \therefore y &= -1 \quad \therefore E(0; -1)\end{aligned}$$

16.4 Gebied = definisieversameling = $\{x : x \in R, x \neq -1\}$

Terrein = waardeversameling = $\{y : y \in R, y \neq 1\}$

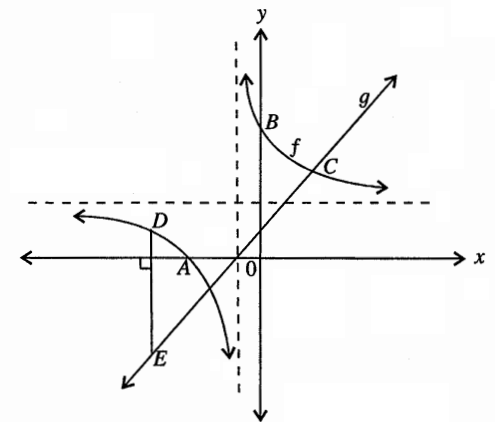
$$\begin{aligned}16.5 \quad g(5) &= \frac{-2}{-5+1} + 1 \quad [\text{Vervang net } x \text{ met } -5 \text{ in } g(x) = \frac{-2}{x+1} + 1] \\ &= \frac{-2}{-4} + 1 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 17

Verwys na die figuur.

$$f(x) = \frac{3}{x+1} + 2$$

$$\text{en } g(x) = x + 1.$$



17.1 Bereken die koördinate van A en B.

17.2 Bereken die koördinate van C.

17.3 As $DE = 4$ eenhede, bereken die koördinate van E.

17.4 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van $f(x)$.

17.5 Gee die vergelyking van $h(x)$ indien h die grafiek van f is wat 2 eenhede na regs en een eenheid afwaarts geskuif word.

Oplossing

17.1 A is x-afsnit van $f(x)$. Stel $y = 0$.

$$0 = \frac{3}{x+1} + 2 \quad [y = 0, \text{ bereken } x]$$

$$\therefore 0 = 3 + 2(x+1) \quad [\text{Maal met } (x+1)]$$

$$\therefore 0 = 3 + 2x + 2$$

$$\therefore -2x = 5 \quad [\text{Neem } 2x \text{ na linkerkant}]$$

$$\therefore x = -\frac{5}{2} \quad \therefore A(-\frac{5}{2}; 0)$$

B is die y -afsnit van $f(x)$. Stel $x = 0$.

$$\therefore y = \frac{3}{0+1} + 2 \quad [x = 0, \text{ bereken } y]$$

$$\therefore y = 3 + 2$$

$$\therefore y = 5 \quad \therefore \underline{B(0;5)}$$

17.2 C is die snypunt van $f(x)$ en $g(x)$. Stel $f(x) = g(x)$.

$$\therefore \frac{3}{x+1} + 2 = x + 1$$

$$\therefore 3 + 2(x+1) = (x+1)(x+1) \quad [\text{Maal met KGV} \rightarrow (x+1)]$$

$$\therefore 3 + 2x + 2 = x^2 + x + x + 1 \quad [\text{Verwyder hakies}]$$

$$\therefore 0 = -3 - 2x - 2 + x^2 + x + x + 1$$

$$\therefore 0 = x^2 - 4$$

$$\therefore 0 = (x-2)(x+2) \quad [\text{Faktoriseer RK}]$$

$$\therefore x = 2 \text{ of } x = -2$$

$$\text{By } C \text{ is } x > 0 \quad \therefore x = 2$$

Stel $x = 2$ in $y = x + 1$

$$\therefore y = 2 + 1$$

$$\therefore y = 3 \quad \therefore \underline{C(2;3)}$$

17.3 DE is verskil tussen $f(x)$ en $g(x)$.

$$\therefore DE = f(x) - g(x)$$

$$\therefore DE = \frac{3}{x+1} + 2 - (x+1)$$

$$\therefore 4 = \frac{3}{x+1} + 2 - x - 1 \quad [DE = 4, \text{ gegee}]$$

$$\therefore 4(x+1) = 3 + 2(x+1) - x(x+1) - (x+1) \quad [\text{Maal met } (x+1)]$$

$$\therefore 4x + 4 = 3 + 2x + 2 - x^2 - x - x - 1$$

$$\therefore 4x + 4 - 3 - 2x - 2 + x^2 + x + x + 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + 4x = 0$$

$$\therefore x(x+4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ of } x = -4$$

$$\text{By } E \text{ is } x < 0 \quad \therefore x = -4$$

E is 'n punt op $g(x)$. Stel dus $x = -4$ in $g(x)$.

$$\therefore y = -4 + 1$$

$$\therefore y = -3 \quad \therefore \underline{E(-4;-3)}$$

17.4 Vergelyking van simmetrie-as

$$y = (x+p) + q \quad \text{of} \quad y = -(x+p) + q$$

$$\therefore y = (x+1) + 2 \quad \therefore y = -(x+1) + 2$$

$$\therefore y = x + 1 + 2 \quad \therefore y = -x - 1 + 2$$

$$\therefore y = x + 3 \quad \therefore y = -x + 1$$

$$\therefore \underline{y = x + 3 \text{ of } y = -x + 1}$$

17.5 1 eenheid af : $y \Rightarrow y + 1$. $\rightarrow$ 2 eenhede regs : $x \Rightarrow x - 2$

$$\therefore y + 1 = \frac{3}{(x-2)+1} + 2$$

$$\therefore y = \frac{3}{x-1} + 2 - 1$$

$$\therefore \underline{h(x) = \frac{3}{x-1} + 1}$$

7. Grafieke van die trigonometriese funksies

7.1 Die grafieke van $y = a \sin x + q$, $y = a \cos x + q$ en $y = a \tan x + q$

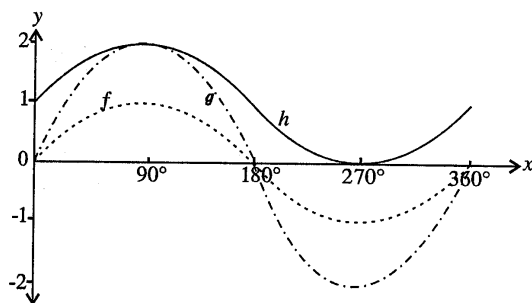
Jy het reeds in Graad 10 die grafieke geskets van $y = a \sin x + q$, $y = a \cos x + q$ en $y = a \tan x + q$

Die skets toon die grafieke

$$\text{van } f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = 2 \sin x$$

$$\text{en } h(x) = \sin x + 1.$$

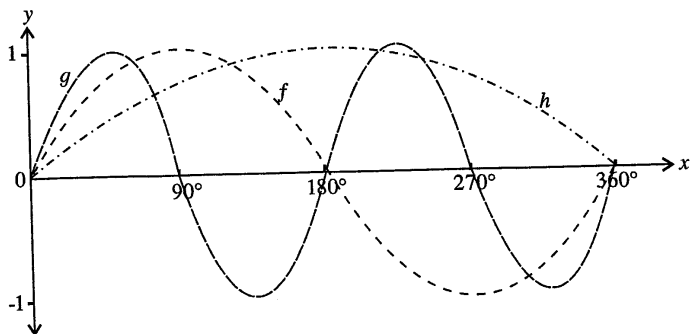


Invloed van a : a is 'n vertikale uitrekking of inkrimping en beïnvloed die amplitude en die waardeversameling van die funksie.

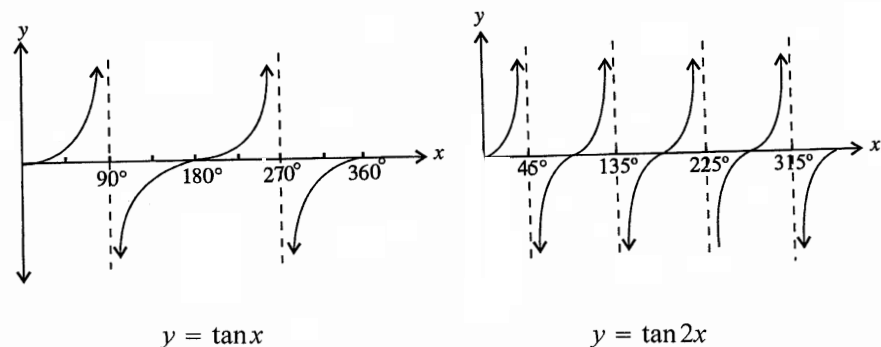
Invloed van q : q is 'n vertikale skuif en beïnvloed die waardeversameling van die funksie.

7.2 Die grafieke van $y = \sin(kx)$; $y = \cos(kx)$ en $y = \tan(kx)$

Die grafieke van $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$ en $h(x) = \sin \frac{1}{2}x$ is geskets.



Kyk ook na die volgende sketse.



Die invloed van k : Dit is duidelik dat k 'n horisontale uitrekking of inkrimping van die funksie is en dat k 'n invloed het op die periode van die funksie.

Die periode van $y = \sin x$ en $y = \cos x$ is 360° terwyl die periode van $y = \tan x$ 180° is.

Die periode van $y = \sin(kx)$ en $y = \cos(kx)$ is $\frac{360^\circ}{k}$ en die periode van

$y = \tan(kx)$ is $\frac{180^\circ}{k}$.

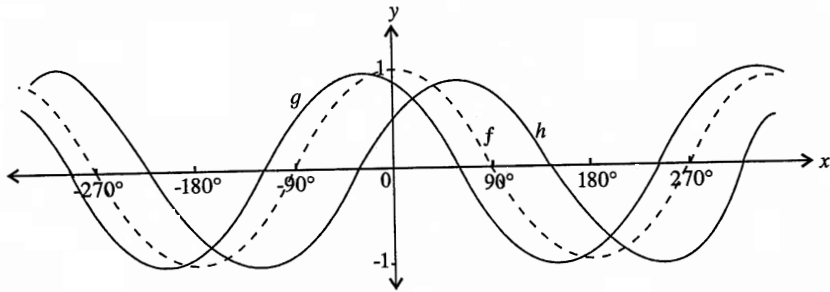
Om die grafieke van die trigonometriese funksies te skets, gebruik jou sakrekenaar om 'n tabel op te stel en teken die grafiek deur van punt tot punt te stip.

Maak egter seker dat jy die grafieke van $y = \sin x$, $y = \cos x$ en $y = \tan x$ ken en maklik kan skets. Ken die x -afsnitte en die draaipunte van die verskillende funksies vir $\{0^\circ \leq x \leq 360^\circ\}$.

Dit sal jou help om translasië maklik te doen en ook om vergelykings van grafieke maklik te bereken indien sketse gegee word.

7.3 Die grafieke van $y = \sin(x + p)$, $y = \cos(x + p)$ en $y = \tan(x + p)$

Die figuur toon die grafieke van $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x + 30^\circ)$ en $h(x) = \cos(x - 60^\circ)$.



Die invloed van p : $g(x)$ is die grafiek van $f(x)$ wat met 30° na links getransleer is terwyl $h(x)$ die translase van $f(x)$ 60° na regs is. Dus : p is die horisontale skuif van die grafiek.

7.4 Die grafieke van $y = a \sin k(x + p)$, $y = a \cos k(x + p)$ en $y = a \tan k(x + p)$.

Jy weet reeds dat a is 'n **vertikale uitrekking of inkrimping** van die grafiek,
 k is 'n **horisontale uitrekking of inkrimping** en
 p is 'n **horisontale skuif** van die grafiek.

Voorbeeld 18

Skets die grafiek van $y = 2 \sin 2(x - 30^\circ)$ vir $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

Oplossing

$k = 2 \rightarrow$ Horisontale inkrimping $\rightarrow$ Periode $= 360^\circ \div 2 = 180^\circ$.
 $a = 2 \rightarrow$ Vertikale uitrekking $\rightarrow$ Maksimum $= 2$, minimum $= -2$.
 $p = -30^\circ \rightarrow$ Horisontale skuif 30° na regs.

Jy kan die grafiek van $y = \sin x$ teken en dan die translases doen,

of

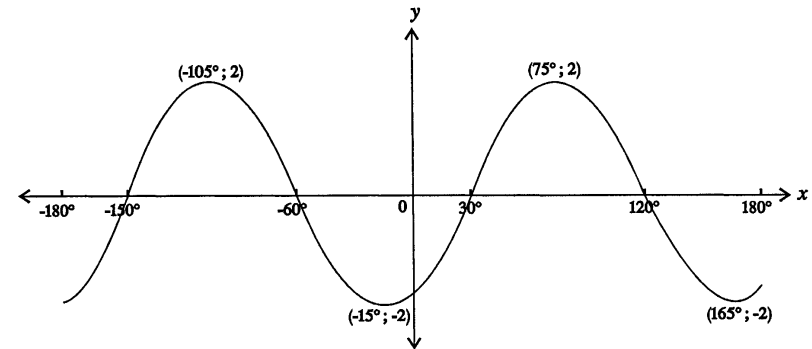
Stel 'n tabel op.

x	-180°	-165°	-150°	-135°	-120°	-105°	-90°	-75°
$f(x)$	-1,73	-1	0	1	1,73	2	1,73	1

-60°	-45°	-30°	-15°	0°	15°	30°	45°	60°
0	-1	-1,73	-2	-1,73	-1	0	1	1,73

75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
2	1,73	1	0	-1	-1,73	-2	-1,73

Skets nou die grafiek deur die punte te stip.



Baie klein intervalle is gebruik om die waardes van die draaipunte te kry.

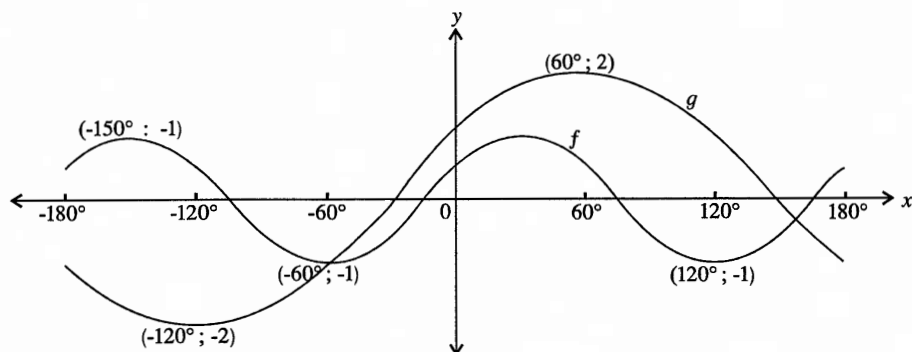
In die grafiek van $y = 2 \sin 2(x - 30^\circ)$ word 3 parameters gebruik, $a(2)$, $k(2)$ en $p(30^\circ)$. In die eksamen sal egter nie meer as twee parameters gelyktydig gevra word nie, bv. $y = \sin k(x + p)$ of $y = a \sin(x + p)$ of $y = a \sin(kx)$ of $y = \sin(x + p) + q$

Voorbeeld 19

Op dieselfde assestelsel, skets die grafieke van $f(x) = \cos(2x - 60^\circ)$ en $g(x) = 2 \sin(x + 30^\circ)$ vir $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$.

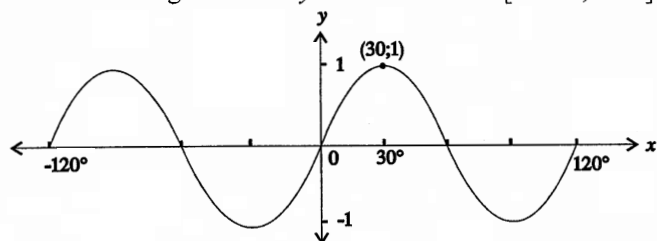
Oplossing

Gebruik jou sakrekenaar om tabelle op te stel en stip die punte.



Voorbeeld 20

Die skets toon die grafiek van $y = \sin ax$ vir $x \in [-120^\circ; 120^\circ]$.



20.1 Bepaal die waarde van a .

20.2 Wat is die waardeversameling van $y = \sin ax + 1$

Oplossing

20.1 $\sin a(30^\circ) = 1$ [(30°; 1) is 'n punt op die grafiek.]

$$\therefore a(30^\circ) = 90^\circ \quad [\sin 90^\circ = 1 \quad \boxed{\text{shift}} \quad \boxed{\sin} \quad \boxed{1} \quad \boxed{=}]$$

$$\therefore a = 3. \quad [90^\circ \div 30^\circ = 3.]$$

[Of : Die periode van $\sin ax = 120^\circ$: $\therefore \frac{360^\circ}{a} = 120^\circ$ $\therefore a = 3.$]

20.2 Waardeversameling van $y = \sin ax$ is $-1 \leq y \leq 1$

$\therefore$ Waardeversameling van $y = \sin ax + 1$ is $-1 + 1 \leq y \leq 1 + 1$

$$\therefore 0 \leq y \leq 2$$

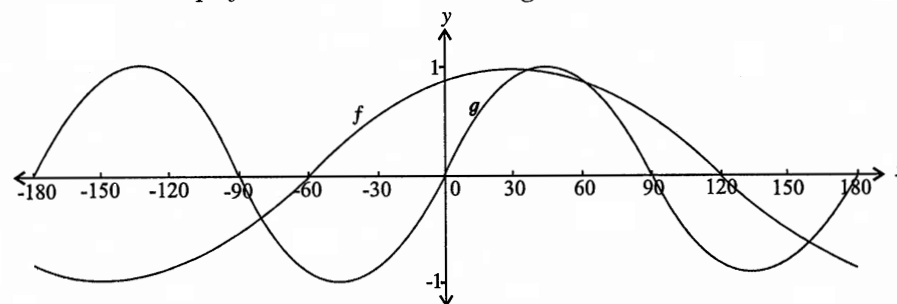
Voorbeeld 21

21.1 Op dieselfde assestelsel maak sketsgrafieke van $f(x) = \cos(x - 30^\circ)$ en $g(x) = \sin 2x$ vir $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$.

21.2 Vir watter waardes van x vir $x \in [0^\circ; 90^\circ]$ is $f(x) = g(x)$.

Oplossing

21.1 Stel 'n tabel op of skets deur translasië te gebruik.



21.2 $\cos(x - 30^\circ) = \sin 2x$

$$\therefore \cos(x - 30^\circ) = \cos(90^\circ - 2x)$$

$$\therefore x - 30^\circ = 90^\circ - 2x$$

$$\therefore x + 2x = 90^\circ + 30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\therefore 3x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\therefore x = 40^\circ + k \cdot 120^\circ$$

$$\text{of} \quad x - 30^\circ = 360^\circ - (90^\circ - 2x)$$

$$\therefore x - 30^\circ = 270^\circ + 2x + k \cdot 360^\circ$$

$$\therefore x - 2x = 270^\circ + 30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\therefore -x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\therefore x = -300^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Vir $k = 1$: $x = -300^\circ + (1)360^\circ = 60^\circ$.

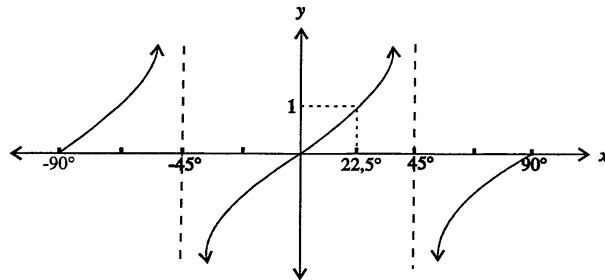
$\therefore f(x) = g(x)$ vir $x \in [0^\circ; 90^\circ]$ as $x = 40^\circ$ of $x = 60^\circ$.

Voorbeeld 22

Skets die grafiek van $y = \tan 2x$ $\{-90^\circ \leq x \leq 90^\circ\}$

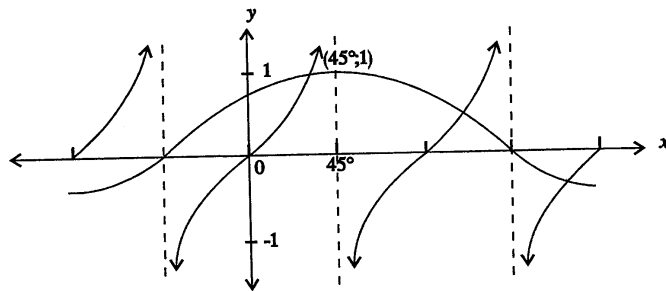
Oplossing

Asimptote by $x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$. Gebruik intervale van $22,5^\circ$ op x -as.



Voorbeeld 23

Die skets toon die grafieke van $f(x) = \tan ax$ en $g(x) = \cos(x + p^\circ)$. Bepaal die waardes van a en p .



Oplossing

Asimptoot van $\tan x$ is $x = 90^\circ$.

$$\therefore a(45^\circ) = 90^\circ \quad [\text{Die asimptoot van } \tan ax \text{ is } x = 45^\circ]$$

$$\therefore a = 2 \quad [90 \div 45 = 2]$$

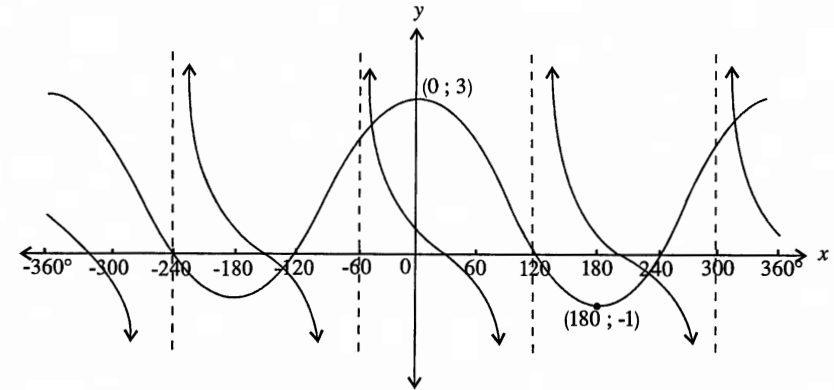
$$\cos(45^\circ + p) = 1 \quad [(45^\circ; 1) \text{ punt op } g(x)]$$

$$\therefore 45^\circ + p = 0^\circ \quad [\text{shift} \quad \cos \quad 1 \quad =]$$

$$\therefore p = -45^\circ$$

Voorbeeld 24

Die skets toon die grafieke van $f(x) = a \tan(x + p)$ en $g(x) = a \cos x + q$ vir $x \in [-360^\circ; 360^\circ]$. Bepaal die vergelykings van $f(x)$ en $g(x)$.



Oplossing

Asimptoot van $a \tan(x + p) : x = 120^\circ \rightarrow$ Asimptoot van $\tan x : x = 90^\circ$

$\therefore f(x)$ is horisontale skuif van $y = \tan x$ 30° na regs en

'n refleksie van $y = \tan x$ in die x -as.

$$\therefore f(x) = -\tan(x - 30^\circ)$$

Amplitude van $g(x) = 2 \rightarrow$ Amplitude van $\cos x = 1$.

$$\therefore a = 2$$

Maksimum waarde van $2 \cos x = 2$

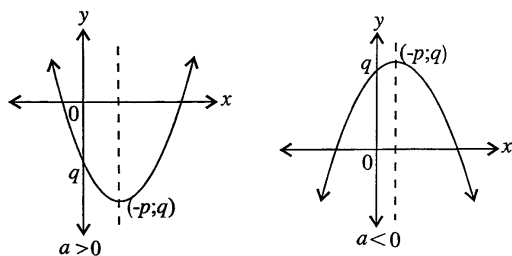
Maksimum waarde van $a \cos x + q = 3 \rightarrow$ Vertikale skuif 1 eenheid op

$$\therefore q = 1$$

$$\therefore g(x) = 2 \cos x + 1$$

OPSOMMING

Die Parabool : $y = a(x+p)^2 + q$



Koördinate van Draaipunt : $(-p; q)$

Simmetrie-as : $x = -p$

Die parabool het geen asimptote nie.

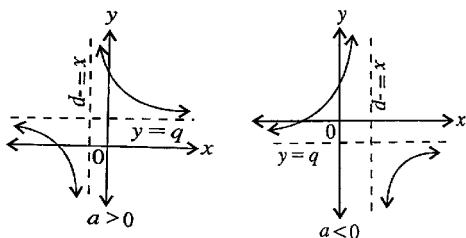
$a > 0 \rightarrow$ die funksie het 'n minimum waarde.

$a < 0 \rightarrow$ die funksie het 'n maksimum waarde.

Die maksimum of minimum waarde = q .

Of vir draaipunt van parabool : Stel $x = -\frac{b}{2a}$ en stel hierdie waarde in vergelyking om die y -waarde van die draaipunt te kry.

Die Hiperbool : $y = \frac{a}{x+p} + q$



Horisontale asimptoot : $y = q$

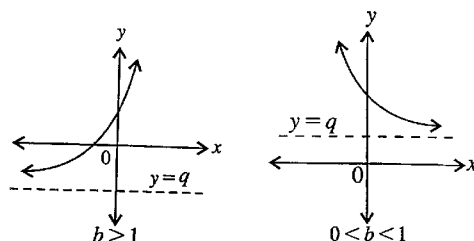
Vertikale asimptoot : $x = -p$

Simmetrie-as : $y = \pm(x+p) + q$

$a > 0 \rightarrow$ grafiek in 1ste en 3de kwadrant

$a < 0 \rightarrow$ grafiek in 2de en 4de kwadrant

Die eksponensiële grafiek : $y = ab^{x+p} + q$



Horisontale asimptoot : $y = q$

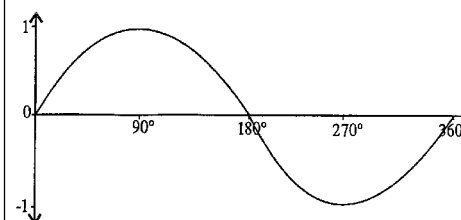
Geen vertikale asimptoot nie.

$b > 1 \rightarrow$ grafiek is toenemend (stygend)

$0 < b < 1 \rightarrow$ grafiek is afnemend (dalend)

Die grafiek het geen simmetrie-as nie.

Die grafiek van $y = \sin x$ $x \in [0^\circ; 360^\circ]$

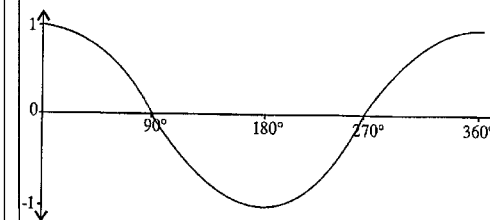


Die periode = 360°

Die amplitude = 1

Maksimum waarde = 1 Minimum waarde = -1.

Die grafiek van $y = \cos x$ $x \in [0^\circ; 360^\circ]$

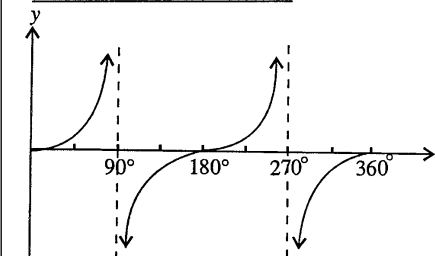


Die periode = 360°

Die amplitude = 1

Maksimum waarde = 1. Minimum waarde = -1.

Die grafiek van $y = \tan x$ $x \in [0^\circ; 360^\circ]$



Die periode = 180°

Asimptote : $x = 90^\circ$ en $x = 270^\circ$

Geen maksimum waarde of minimum waarde

Die invloed van die parameters a , p , q en k

a is die vertikale uitrekking of inkrimping van die grafiek

p is die horisontale skuif van die grafiek

q is die vertikale skuif van die grafiek

Om die x -afsnitte te bereken, stel $y = 0$ en om die y -afsnit te bereken, stel $x = 0$.

k is 'n horisontale uitrekking of inkrimping van die grafiek en beïnvloed die periode van die funksie.