

12.4 Inverse van die eksponensiale funksie is die log-funksie.

$$\therefore f^{-1} = \log_{\frac{1}{3}} x \quad [f(x) = \frac{1}{3}^x]$$

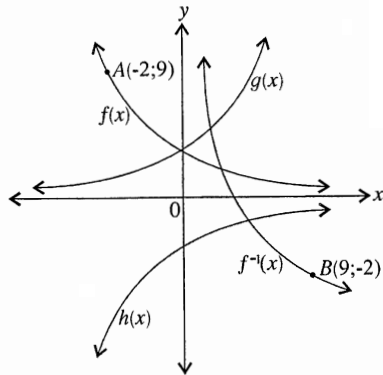
12.5 $f(x) = \frac{1}{3}^x$

Dalende funksie : $0 < \frac{1}{3} < 1$

Horisontale asimptoot : $y = 0$

y-afsnit : $y = 1$

Teken $g(x)$ deur $f(x)$ te reflekteer in die y-as
Teken $h(x)$ deur $f(x)$ te reflekteer in die x-as
Teken $f^{-1}(x)$ deur $f(x)$ te reflekteer in die lyn $y = x$.



12.6 $A(-2;9)$ is 'n punt op $f(x)$. Dus is $B(9;-2)$ 'n punt op $f^{-1}(x)$. Sien skets.

$$\therefore \underline{f^{-1}(x) > -2 \text{ as } 0 < x < 9}$$

OE FENING 3

1. Los op vir x , korrek tot twee desimale plekke :

1.1 $8^x = 160$

1.2 $3^x = 15$

1.3 $3 \cdot 6^x = 10$

1.4 $7^x = 126(5^x)$

1.5 $2^x \cdot 4^{x+1} = 24$

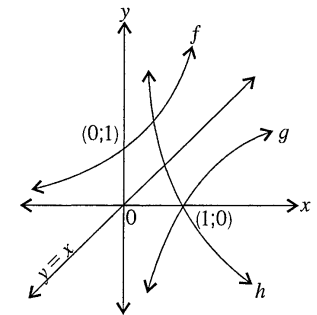
1.6 $35(1,25)^x = 245$

2. In die skets word die volgende funksies voorgestel :

* f , met vergelyking $y = 3^x$

* g , die refleksie van f in die lyn $y = x$.
(g is dus die inverse van f .)

* h , die refleksie van g in die x-as.



2.1 Bepaal die definiërende vergelykings van g en h in die vorm $y = \dots\dots\dots$

2.2 Bepaal, met behulp van die skets, die waardes van x waarvoor :

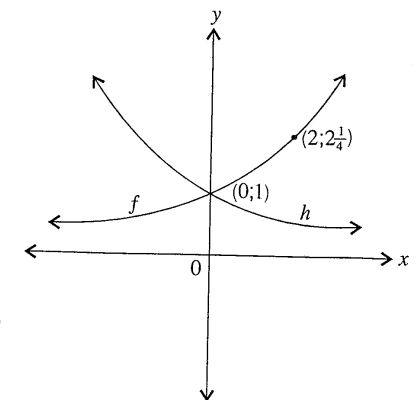
a) $3^x > 0$.

b) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 0$.

3. In die skets stel f die funksie $f(x) = a^x$ voor, ($a > 0$).

h is simmetries met betrekking tot f om die y-as.

Die punt $(2; 2\frac{1}{4})$ lê op die kurwe van f .



3.1 Vind die waarde van a .

3.2 As $g(x) = f^{-1}(x)$, die inverse van f , bepaal die vergelyking van g .

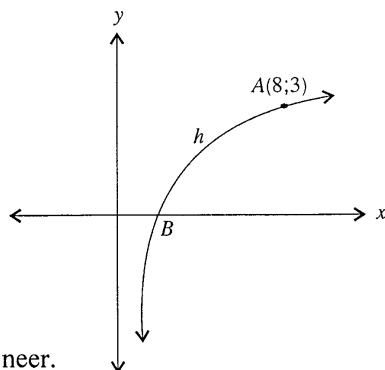
3.3 Skryf die gebied (definisieversameling) van g neer.

3.4 Bepaal die vergelyking van h .

3.5 Skryf die terrein (waardeversameling) van h neer.

(Oplossings bl. 254-255)

4. Die figuur toon die grafiek van $h(x) = \log_a x$. Die punt $A(8; 3)$ lê op die kromme van h en B is die x -afsnit van h .

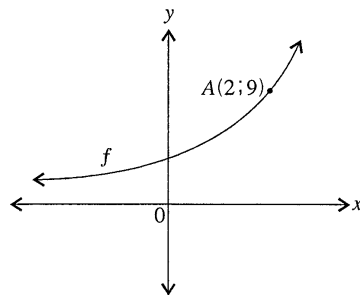


- 4.1 Bepaal die waarde van a .
 4.2 Skryf die koördinate van B neer.
 4.3 Bepaal die vergelyking van h^{-1} , die inverse van h , in die vorm $h^{-1}(x) = \dots\dots\dots$.
 4.4 Bepaal die waarde van $h^{-1}(3)$.
 4.5 Skryf die definisieversameling van h neer.
 4.6 Bepaal die vergelyking van $g(x)$, die refleksie van $h(x)$ in die y -as.

5. Gegee : $g(x) = \log_a x$. $C(\frac{1}{2}; -1)$ is 'n punt op die kromme van g .

- 5.1 Bereken die waarde van a .
 5.2 Gee die vergelyking van die funksie h wat simmetries is aan g met betrekking tot die x -as.
 5.3 Teken die grafiek van $g(x)$ en $h(x)$ op dieselfde assestelsel.
 5.4 Vir watter waarde van x is $g(x) = h(x)$?
 5.5 Gebruik die grafiek om vir x op te los : $\log_{\frac{1}{2}} x = 1$.

6. Die skets toon die grafiek van $f(x) = a^x$. $A(2; 9)$ is 'n punt op die kromme van f .



- 6.1 Bepaal die waarde van a .
 6.2 Gee die vergelyking van $h(x)$ indien h die refleksie is van f in die y -as.
 6.3 Bepaal die vergelyking van $f^{-1}(x)$, die inverse van $f(x)$.
 6.4 Gee die vergelyking van $g(x)$, die refleksie van $f^{-1}(x)$ in die y -as.
 6.5 Vir watter waardes van x is $f(x) \geq 9$?

FINANSIËLE WISKUNDE

In Graad 11 het jy reeds die volgende formules gebruik

Enkelvoudige rente : $A = P(1 \pm in)$

Saamgestelde rente : $A = P(1 \pm i)^n$

Waar A = die eindbedrag

P = die aanvanklike bedrag

i = die rentekoers, uitgedruk as 'n desimale breuk

n = die aantal rentedraende periodes.

Hersien eers die afdelings oor Finansiële Wiskunde in die Graad 10 en Graad 11 handleidings.

1. Die berekening van die beleggingstydperk (n)

Om die waarde van n in die formule $A = P(1 \pm i)^n$ te bereken, gaan ons gebruik maak van logaritmes.

Kyk na die volgende voorbeelde.

Voorbeeld 1

Lesiba het 'n bonus van R4 500 vir voortrefflike werk by sy werkplek ontvang. Hy belê die geld teen 'n koers van 10% per jaar, saamgestelde rente, jaarliks saamgestel, en ontvang 'n bedrag van R9 646,12 aan die einde van die periode. Vir hoeveel jaar het hy die geld belê?

Oplossing

Saamgestelde rente $\therefore A = P(1 + i)^n$

$$\therefore 9646,12 = 4500(1 + 0,1)^n \quad [A = 9646,12, P = 4500 \text{ en } i = 0,1]$$

$$\therefore \frac{9646,12}{4500} = (1 + 0,1)^n \quad [\text{Deel deur } 4500]$$

$$\therefore \frac{9646,12}{4500} = (1,1)^n \quad [\text{Vereenvoudig binne hakies aan RK}]$$

$$\therefore \log \frac{9646,12}{4500} = \log(1,1)^n \quad [\text{Neem logs aan beide kante}]$$

$$\therefore \log \frac{9646,12}{4500} = n \log 1,1 \quad [\log a^n = n \log a]$$

$$\therefore n = \frac{\log \frac{9646,12}{4500}}{\log 1,1}$$

$$\therefore n = 7,9999$$

$\therefore$ Die geld was belê vir 8 jaar

Voorbeeld 2

'n Man belê R15 000 teen 'n rentekoers van 12% p. j., maandeliks saamgestel. Aan die einde van die termyn ontvang hy R27 250. Hoe lank was die geld belê?

Oplossing

$$A = (1 + i)^n$$

$$\therefore 27250 = 15000\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12n} \quad [\text{Rente maandeliks saamgestel : deel } i \text{ deur } 12 \text{ en maal } n \text{ met } 12]$$

$$\therefore \frac{27250}{15000} = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12n} \quad [\text{Deel deur } 15000]$$

$$\therefore \frac{109}{60} = (1,01)^{12n} \quad \left[\frac{27250}{15000} = \frac{109}{60} \text{ en } \left(1 + \frac{0,12}{12}\right) = 1,01\right]$$

$$\therefore \log \frac{109}{60} = \log(1,01)^{12n} \quad [\text{Neem logs aan beide kante}]$$

$$\therefore \log \frac{109}{60} = 12n \log(1,01) \quad [\log a^n = n \log a]$$

$$\therefore 12n = \frac{\log \frac{109}{60}}{\log 1,01}$$

$$\therefore 12n = 59,99833..$$

$$\therefore n = 4,9998... \quad [\text{Deel deur } 12]$$

$\therefore$ Geld was belê vir 5 jaar

Voorbeeld 3

Kantoortoerusting verminder teen 16% p. j. volgens die verminderdesaldo metode. Hoe lank sal dit neem voordat die waarde van die toerusting halveer?

Oplossing

$$\text{Verminderdesaldo metode } \therefore A = P(1 - i)^n$$

$$\text{Stel } P = 2x. \text{ Die waarde halveer, dus } A = x.$$

$$\therefore x = 2x(1 - 0,16)^n$$

$$\therefore \frac{x}{2x} = (1 - 0,16)^n \quad [\text{Deel deur } 2x]$$

$$\therefore 0,5 = (0,84)^n$$

$$\therefore \log 0,5 = \log(0,84)^n \quad [\text{Neem logs aan beide kante}]$$

$$\therefore \log 0,5 = n \log 0,84 \quad [\log a^n = n \log a]$$

$$\therefore n = \frac{\log 0,5}{\log 0,84} \quad [\text{Deel deur } \log 0,84]$$

$$\therefore n = 3,9755$$

$\therefore$ Na 4 jaar sal die waarde halveer

2. Toekomstige waarde van 'n annuïteit

Wanneer mense vir 'n spesifieke doel spaar, belê hulle nie altyd 'n eenmalige bedrag nie, maar deponeer maandeliks 'n vaste bedrag in 'n spaarrekening of 'n beleggingsfonds. Saamgestelde rente word verdien op die geld wat gedeponeer word.

Die toekomstige waarde van 'n annuïteit is die som van alle betalings wat gemaak is plus alle rente wat verdien is.

Kyk na die volgende voorbeelde.

Voorbeeld 4

Peter deponeer aan die begin van elke maand R500 in 'n spaarrekening. Die rentekoers op die spaarrekening is 12% p.j., maandeliks saamgestel. Watter bedrag sal na ses maande in die rekening wees?

Oplossing

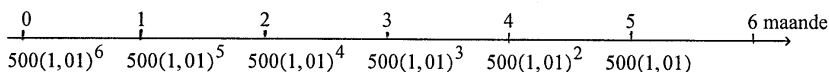
Die rentekoers is 12% p.j., maandeliks saamgestel, deel dus i deur 12.
Op die eerste betaling ontvang hy rente vir 6 maande.

$$\therefore 500(1 + 0,01)^6 = 500(1,01)^6 \quad \left[\frac{i}{12} = \frac{0,12}{12} = 0,01 \right]$$

Op die tweede betaling ontvang hy rente vir 5 maande : $500(1,01)^5$

Op die laaste betaling ontvang hy rente vir een maand : $500(1,01)$

Kom ons stel die betalings voor op 'n tydlyn.



Ons begin by die laaste betaling :

Die totale bedrag beskikbaar na 6 maande sal dus wees :

$$500(1,01) + 500(1,01)^2 + 500(1,01)^3 + 500(1,01)^4 + 500(1,01)^5 + 500(1,01)^6$$

Dit vorm 'n meetkundige reeks met :

$$a = 500(1,01) \quad \text{en} \quad r = 1,01 \quad \left[r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{500(1,01)^2}{500(1,01)} = 1,01 \right]$$

Bereken nou die som tot 6 terme.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\therefore S_6 = \frac{500(1,01)[(1,01)^6 - 1]}{1,01 - 1}$$

$$= \underline{\underline{R3\,106,77}}$$

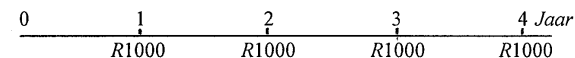
Voorbeeld 5

'n Bedrag van R1 000 word aan die einde van elke jaar in 'n spaarrekening gedeponeer. Die rentekoers is 12% per jaar, jaarliks saamgestel. Hoeveel geld sal na 4 jaar in die rekening wees?

Die eerste deposito word gedoen aan die einde van die eerste jaar en die laaste deposito aan die einde van die vierde jaar.

Oplossing

Kom ons maak gebruik van 'n tydlyn.



Die eerste bedrag word aan die einde van die eerste jaar belê, dus vir 3 jaar.

Die eerste bedrag verdien rente vir 3 jaar : $\therefore A = 1000(1 + 0,12)^3$

Die tweede bedrag verdien rente vir 2 jaar : $\therefore A = 1000(1 + 0,12)^2$

Die derde bedrag verdien rente vir 1 jaar : $\therefore A = 1000(1 + 0,12)$

Die laaste bedrag word aan die einde van die periode betaal en verdien dus geen rente : $\therefore A = 1000$

Tel nou die bedrae bymekaar :

$$1000 + 1000(1,12) + 1000(1,12)^2 + 1000(1,12)^3 \quad [(1 + 0,12) - 1,12]$$

Dit vorm 'n meetkundige reeks met :

$$a = 1000 \text{ en } r = (1,12) \quad [\text{Elke term word vermenigvuldig met } 1,12]$$

Om die bedrag na 4 jaar te bereken kan ons dus die formule vir die som van 'n

$$\text{meetkundige reeks gebruik : } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\therefore S_4 = \frac{1000(1,12^4 - 1)}{1,12 - 1} \quad [n = 4]$$

$$\therefore S_4 = R4779,33$$

Let op na die verskil tussen Voorbeeld 4 en Voorbeeld 5.

Voorbeeld 4 : Die eerste betaling word aan die begin van die periode gemaak en die laaste betaling een maand voor die einde van die periode.

Voorbeeld 5 : Die eerste betaling word gemaak aan die einde van die eerste maand en die laaste betaling aan die einde van die periode.

Die volgende formule word gebruik om die toekomstige waarde van 'n annuïteit of spaarplan te bereken :

Formule vir die toekomstige waarde van 'n annuïteit

$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

waar

F = toekomstige waarde

x = bedrag wat elke periode betaal word

i = rentekoers, uitgedruk as desimale breuk

n = aantal betalings wat gemaak word

Hierdie formule kan egter net gebruik word as daar **aan die einde van die periode 'n betaling gemaak word wat geen rente verdien nie**, soos in voorbeeld 5.

As die laaste betaling nie aan die einde van die periode gemaak word nie en dus rente verdien, bereken die toekomstige waarde deur die somformule vir 'n meetkundige reeks te gebruik soos in voorbeeld 4.

Voorbeeld 6

Chris besluit om maandeliks R1 000 in 'n beleggingsrekening te deponeer om voorsiening te maak vir sy aftrede op 60 jaar. Die rentekoers op die rekening is 11,5% per jaar, maandeliks saamgestel. As hy die eerste betaling maak op sy 40^{ste} verjaarsdag en die laaste betaling een maand voor sy 60^{ste} verjaarsdag, watter bedrag sal hy in die rekening hê op sy sestigste verjaarsdag?

Oplossing

Die laaste betaling word nie aan die einde van die termyn gemaak nie, gebruik dus die somformule vir meetkundige reekse.

$$\text{Laaste betaling} = 1000\left(1 + \frac{0,115}{12}\right) \quad [\text{Verdien rente vir een maand}]$$

$$\text{Tweede laaste betaling} = 1000\left(1 + \frac{0,115}{12}\right)^2 \quad [\text{Verdien rente vir 2 maande}]$$

$$\therefore \text{Meetkundige reeks : } a = 1000\left(1 + \frac{0,115}{12}\right) \text{ en } r = \left(1 + \frac{0,115}{12}\right)$$

Eerste betaling op sy veertigste verjaarsdag, laaste betaling een maand voor sy sestigste verjaarsdag $\therefore 20 \times 12$ betalings = 240. Bereken dus S_{240} .

$$S_{240} = \frac{a(r^{240} - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{1000\left(1 + \frac{0,115}{12}\right)\left(\left(1 + \frac{0,115}{12}\right)^{240} - 1\right)}{\left(1 + \frac{0,115}{12}\right) - 1} \quad \left[a = 1000\left(1 + \frac{0,115}{12}\right) \text{ en } r = \left(1 + \frac{0,115}{12}\right)\right]$$

$$= R933\,966,61$$

Voorbeeld 7

Robert besluit om vir 5 jaar maandeliks R500 te deponeer in 'n beleggingsfonds wat 12% rente verdien, maandeliks saamgestel. Hy maak die eerste betaling aan die einde van die eerste maand en die laaste betaling aan die einde van die 5 jaar periode. Bereken die waarde van die belegging na 5 jaar.

Oplossing

Eerste betaling aan die einde van die eerste maand en laaste betaling aan die einde van die termyn. Gebruik dus die toekomstige waarde annuïteïtsformule.

$$\begin{aligned} F &= \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i} \\ \therefore F &= \frac{500[(1+0,01)^{60} - 1]}{0,01} & [x = 500; \text{rente maandeliks saamgestel} \\ & & \therefore \frac{i}{12} = \frac{0,12}{12} = 0,01; n = 12 \times 5 = 60] \\ &= \frac{500[(1,01)^{60} - 1]}{0,01} & [\text{Vereenvoudig}(1+0,01) \text{ na } 1,01, \\ & & \text{dit maak die bewerking makliker}] \\ &= \underline{R40\,834,83} \end{aligned}$$

Voorbeeld 8

'n Man begin spaar om 'n motor te kan koop. Hy open 'n spaarrekening en deponeer dadelik 'n bedrag van R1 000. Daarna deponeer hy aan die einde van elke maand R1 000 in die rekening en hou daarmee vol vir 3 jaar. Die rentekoers is 13% per jaar, maandeliks saamgestel. Watter bedrag sal aan die einde van die 3 jaar beskikbaar wees om die motor te koop?

Oplossing

Nou word die eerste betaling dadelik gemaak en nie aan die einde van die eerste maand nie.

As die eerste betaling dadelik gemaak word en die laaste betaling aan die einde van die periode, gebruik die toekomstige waarde annuïteïtsformule.

Onthou net : Die eerste betaling is dadelik gemaak, die totale aantal betalings is dus $3 \times 12 +$ die eerste betaling wat gemaak is.

$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= \frac{1000[(1 + \frac{0,13}{12})^{37} - 1]}{\frac{0,13}{12}} & [x = 1000; \text{rente maandeliks saamgestel} \\ & & \therefore \frac{i}{12} = \frac{0,13}{12}; n = 3 \times 12 + 1 = 37] \\ &= \underline{R45\,217,23} \end{aligned}$$

Voorbeeld 9

Elaine deponeer aan die einde van elke maand 'n bedrag in 'n spaarrekening. Die rentekoers is 12% per jaar is, maandeliks saamgestel. Watter bedrag moet sy maandeliks spaar om na 8 jaar R50 000 in die rekening te hê? Die betalings word aan die einde van elke maand gemaak.

Oplossing

Die betalings word aan die einde van elke maand gemaak, die eerste betaling aan die einde van die eerste maand en die laaste betaling aan die einde van die termyn.

Gebruik dus die toekomstige waarde annuïteïtsformule en bereken x .

$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore 50000 &= \frac{x[(1+0,01)^{96} - 1]}{0,01} & [F = 50000; \text{rente maandeliks saamgestel} \\ & & \therefore \frac{i}{12} = \frac{0,12}{12} = 0,01; n = 96] \end{aligned}$$

$$\therefore 50000 \times 0,01 = x[(1,01)^{96} - 1] \quad [\text{Maal met } 0,01]$$

$$\therefore \frac{50000 \times 0,01}{[(1,01)^{96} - 1]} = x \quad [\text{Deel deur } [(1,01)^{96} - 1] \text{ om } x \text{ alleen te kry}]$$

$$\therefore x = 312,64$$

R312,64 moet maandeliks gespaar word

Voorbeeld 10

Jean deponer aan die einde van elke maand R1 000 in 'n spaarrekening. Indien die rentekoers op die spaarrekening 10% p.j is, maandeliks saamgestel, hoe lank sal dit neem voordat hy R50 000 in die rekening sal hê?

Oplossing

Gebruik toekomstige waarde annuïteitsformule en bereken nou n .

$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$\therefore 50000 = \frac{1000[(1 + \frac{0,1}{12})^n - 1]}{\frac{0,1}{12}} \quad [F = 50000; x = 1000; \text{rente maandeliks saamgestel} \therefore \frac{i}{12} = \frac{0,1}{12}; \text{bereken } n]$$

$$\therefore 50000 \times \frac{0,1}{12} = 1000[(\frac{121}{120})^n - 1] \quad [\text{Maal met } \frac{0,1}{12}; \text{Let op: } (1 + \frac{0,1}{12}) = \frac{121}{120}]$$

$$\therefore \frac{50000 \times \frac{0,1}{12}}{1000} = (\frac{121}{120})^n - 1 \quad [\text{Deel deur 1000}]$$

$$\therefore \frac{50000 \times \frac{0,1}{12}}{1000} + 1 = (\frac{121}{120})^n \quad [\text{Neem } -1 \text{ na linkerkant}]$$

$$\therefore \frac{17}{12} = (\frac{121}{120})^n \quad [\text{Vereenvoudig linkerkant}]$$

$$\therefore \log \frac{17}{12} = \log(\frac{121}{120})^n \quad [\text{Neem logs aan beide kante}]$$

$$\therefore \log \frac{17}{12} = n \log \frac{121}{120} \quad [\log a^n = n \log a]$$

$$\therefore n = \frac{\log \frac{17}{12}}{\log \frac{121}{120}} \quad [\text{Deel deur } \log \frac{121}{120}]$$

$$\therefore n = 41,97$$

$\therefore$ Dit sal 42 maande of $3\frac{1}{2}$ jaar neem

Let op : n = aantal betalings gemaak. Daar word maandelikse betalings gemaak, dus as $n = 41,97$ sal dit 42 maande neem.

Voorbeeld 11

Oor 4 jaar wil Gregory R200 000 beskikbaar hê om 'n nuwe motor te koop.

11.1 Bereken die bedrag wat hy maandeliks in 'n rekening moet deponer indien die rentekoers 8% per jaar is, maandeliks saamgestel.

11.2 Twaalf maande nadat Gregory die eerste deposito gemaak het en elke 12 maande daarna, onttrek hy R10 000 uit die rekening. Wat moet sy nuwe maandelikse deposito wees indien hy 4 sulke onttrekkings maak?

Oplossing

$$11.1 F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$\therefore 200000 = \frac{x[(1 + \frac{0,08}{12})^{48} - 1]}{\frac{0,08}{12}} \quad [F = 200000; \text{rente maandeliks saamgestel, dus } i \div 12; n = 48]$$

$$\therefore \frac{200000 \times \frac{0,08}{12}}{[(1 + \frac{0,08}{12})^{48} - 1]} = x \quad [\text{Maal met } \frac{0,08}{12} \text{ en deel deur } [(1 + \frac{0,08}{12})^{48} - 1]]$$

$$\therefore x = R3549,25$$

11.2 Hy onttrek elke jaar R10 000.

Bereken die maandelikse deposito wat gemaak moet word sodat hy aan die einde van die jaar R10 000 kan onttrek. Gebruik dus die toekomstige waarde annuïteitsformule met $F = 10000$, $i = \frac{0,08}{12}$ en $n = 12$. Onthou, hy wil aan die einde van die jaar R10000 beskikbaar hê, dus 12 maandelikse betalings.

$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$\therefore 10000 = \frac{x[(1 + \frac{0,08}{12})^{12} - 1]}{\frac{0,08}{12}} \quad [F = 10000; \text{rente maandeliks saamgestel, dus } \frac{i}{12}, n = 12]$$

$$\therefore \frac{10000 \times \frac{0,08}{12}}{\left[\left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12} - 1 \right]} = x \quad \left[\text{Maal met } \frac{0,08}{12}, \text{ deel deur } \left[\left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12} - 1 \right] \right]$$

$$\therefore x = R803,22$$

$$\therefore \text{Nuwe paaiement} = R3549,25 + R803,22 = R4352,47$$

Onthou : n = aantal betalings gemaak

Die eerste betaling word gewoonlik aan die einde van die eerste maand gemaak. As die eerste betaling egter dadelik gemaak word, onthou net om die ekstra betaling by te tel.

3. Delgingsfondse

'n Delgingsfonds is geld wat 'n besigheid opsy sit om voorsienig te maak vir groot kapitale uitgawes of om toerusting na 'n sekere tydperk te kan vervang. 'n Delgingsfonds is dus 'n spaarplan of toekomstige waarde annuïteit.

Voorbeeld 12

'n Skool koop 'n bus aan vir die bedrag van R650 000. Die waarde van die bus depresseer teen 18% per jaar volgens die verminderdesaldo metode. Die skool wil oor 5 jaar 'n nuwe bus aankoop.

Die bus se prys styg teen 15% per jaar, jaarliks saamgestel.

12.1 Wat sal die waarde van die bus na 5 jaar wees?

12.2 Wat sal 'n nuwe bus na 5 jaar kos?

12.3 Bereken die waarde van die delgingsfonds wat die skool nodig sal hê om die ou bus te vervang.

12.4 Indien die rentekoers 12% per jaar is, maandeliks saamgestel, watter bedrag moet die skool maandeliks in die delgingsfonds stort om die nuwe bus te kan bekostig?

Oplossing

12.1 Verminderde-balans depresiasie $\therefore A = P(1 - i)^n$

$$\therefore A = 650000(1 - 0,18)^5$$

$$\therefore A = R240\,980,90$$

12.2 Bus se prys styg $\therefore A = P(1 + i)^n$

$$\therefore A = 650000(1 + 0,15)^5$$

$$= R1\,307\,382,17$$

12.3 Delgingsfonds = nuwe bus se prys – waarde van ou bus

$$= R1\,307\,382,17 - R240\,980,9$$

$$= R1\,066\,401,27$$

12.4 Gebruik die formule : $F = \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i}$ en bereken x.

$$\therefore 1066401,27 = \frac{x[(1 + 0,01)^{60} - 1]}{0,01} \quad \left[F = 1066401,27, i \div 12, \text{ dus } \frac{0,12}{12} = 0,01; n = 60 \right]$$

$$\therefore 1066401,27 \times 0,01 = x[(1,01)^{60} - 1] \quad \left[\text{Maal met } 0,01; (1 + 1,01) = 1,01 \right]$$

$$\therefore \frac{1066401,27 \times 0,01}{[(1,01)^{60} - 1]} = x \quad \left[\text{Deel deur } (1,01)^{60} - 1 \right]$$

$$\therefore R13057,49 = x$$

$$\therefore \text{Die maandelikse paaiement} = R13\,057,49$$

4. **Huidige waarde van 'n annuïteit of verbandterugbetalings**

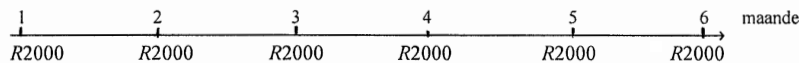
'n Bedrag geld word gewoonlik van 'n finansiële instelling geleen om 'n huis, 'n motor, meubels, ens., aan te koop. Elke maand moet daar dan 'n vaste bedrag betaal word totdat die lening terugbetaal is. As gevolg van die uitwerking van saamgestelde rente, is die bedrag wat aan die einde terugbetaal word, baie meer as die bedrag wat aanvanklik geleen word. Die huidige waarde van 'n annuïteit is die waarde van die bedrag geld wat geleen word voordat rente bygevoeg word.

Voorbeeld 13

Die bank staan 'n lening toe aan Jane teen 'n rentekoers van 24% per jaar, maandeliks saamgestel. Sy betaal die lening in 6 maandelikse paaïemente van R2 000 terug. Bereken die waarde van die lening wat toegestaan is.

Oplossing

Kom ons maak weer gebruik van 'n tydlyn :



Die eerste bedrag van R2000 wat betaal word sluit rente in. Ons moet dus eers bepaal wat die bedrag voor rente is. Ons gebruik die formule :

$$A = P(1 + i)^n$$

$$\therefore 2000 = P(1 + 0,02) \quad [A = 2000, \text{ rente maandeliks saamgestel, dus } \frac{0,24}{12} = 0,02; 1 \text{ maand, dus } n = 1]$$

$$\therefore \frac{2000}{(1,02)} = P \quad [(1 + 0,02) = 1,02]$$

$$\therefore 2000(1,02)^{-1} = P \quad \left[\frac{1}{1,02} = (1,02)^{-1}\right]$$

Die bedrag wat die tweede maand betaal is :

$$2000 = P(1 + 0,02)^2 \quad \therefore P = \frac{2000}{(1,02)^2} \quad \therefore P = 2000(1,02)^{-2}$$

Net so is die bedrag wat die derde maand betaal is : $P = 2000(1,02)^{-3}$

Die bedrag wat geleen is, is dus

$$2000(1,02)^{-1} + 2000(1,02)^{-2} + 2000(1,02)^{-3} + \dots + 2000(1,02)^{-6}$$

wat 'n meetkundige reeks vorm met $a = 2000(1,02)^{-1}$ en $r = (1,02)^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{Bereken die som tot 6 terme : } S_6 &= \frac{2000(1,02)^{-1}(1 - (1,02)^{-6})}{1 - (1,02)^{-1}} \\ &= \frac{2000(1,02)^{-1}(1 - (1,02)^{-6})}{1 - (1,02)^{-1}} \\ &= \underline{\underline{11\,202,86}} \end{aligned}$$

Formule vir die huidige waarde van 'n annuïteit

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

waar : P = huidige waarde (die bedrag geleen)
 x = bedrag wat elke periode betaal word
 i = rentekoers, uitgedruk as desimale breuk
 n = aantal betalings wat gemaak word

Voorbeeld 14

Philip neem 'n lening by die bank om 'n motor te koop. Watter bedrag kan hy leen indien hy elke maand 'n paaïement van R1 200 vir 3 jaar kan betaal. Die eerste paaïement word betaal een maand nadat die lening toegestaan is en die rentekoers is 24% per jaar, maandeliks saamgestel.

Oplossing

Gebruik nou die huidige waarde annuïteitsformule.

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$\therefore P = \frac{1200[1 - (1 + 0,02)^{-36}]}{0,02} \quad \left[x = R1\,200, \frac{i}{12} = \frac{0,24}{12} = 0,02, \right. \\ \left. n = 36 (3 \times 12) \right]$$

$$\therefore P = R30\,586,61 \quad \therefore R30\,586,61 \text{ kan geleen word.}$$

Voorbeeld 15

Colene leen 'n bedrag van R30 000 teen 22% rente per jaar, maandeliks saamgestel. Watter bedrag moet sy maandeliks betaal indien sy die lening oor 4 jaar wil afbetaal?

Oplossing

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$\therefore 30000 = \frac{x[1 - (1 + \frac{0,22}{12})^{-48}]}{\frac{0,22}{12}} \quad \left[P = R30000; \frac{i}{12} = \frac{0,22}{12}, \right. \\ \left. n = 4 \times 12 = 48, \text{ bereken nou } x \right]$$

$$\therefore 30000 \times \frac{0,22}{12} = x[1 - (1 + \frac{0,22}{12})^{-48}] \quad [\text{Maal met } \frac{0,22}{12}]$$

$$\therefore \frac{30000 \times \frac{0,22}{12}}{[1 - (1 + \frac{0,22}{12})^{-48}]} = x \quad [\text{Deel deur } [1 - (1 + \frac{0,22}{12})^{-48}]]$$

$$\therefore 945,18 = x \quad \therefore R945,18 \text{ moet maandeliks terugbetaal word}$$

Voorbeeld 16

'n Man leen R50 000 by 'n bank. Die rentekoers is 18% per jaar, maandeliks saamgestel. Indien die man 'n maandelikse paalement van R1200 betaal, hoe lank sal dit hom neem om die lening terug te betaal?

Oplossing

Gebruik weer huidige waarde annuïteitsformule en bereken nou n .

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$\therefore 50000 = \frac{1200[1 - (1 + 0,015)^{-n}]}{0,015} \quad [P = 50000, x = 1200; \\ \frac{i}{12} = \frac{0,18}{12} = 0,015, \text{ bereken } n]$$

$$\therefore \frac{50000 \times 0,015}{1200} = [1 - (1 + 0,015)^{-n}] \quad [\text{Maal met } 0,015, \text{ deel deur } 1200]$$

$$\therefore \frac{50000 \times 0,015}{1200} - 1 = -(1,015)^{-n} \quad [\text{Neem } 1 \text{ na LK, } (1 + 0,015) = 1,015]$$

$$\therefore -0,375 = -(1,015)^{-n} \quad [\text{Vereenvoudig linkerkant}]$$

$$\therefore 0,375 = (1,015)^{-n} \quad [\text{Maal met } -1]$$

$$\therefore \log 0,375 = \log(1,015)^{-n} \quad [\text{Neem logs aan beide kante}]$$

$$\therefore \log 0,375 = -n \log(1,015) \quad [\text{Onthou : } \log a^n = n \log a]$$

$$\therefore \frac{\log 0,375}{\log 1,015} = -n \quad \therefore -n = -65,87 \quad \therefore n = 65,87$$

$$\therefore \text{Dit sal 66 maande of } 5\frac{1}{2} \text{ jaar neem om die lening terug te betaal}$$

Voorbeeld 17

Ernest koop 'n motor vir R240 000. Hy betaal 'n deposito van 20% en neem 'n lening by die bank vir die balans. Die rentekoers op die lening is 11,5% p. j., maandeliks saamgestel. Bereken:

17.1 die waarde van die lening.

17.2 die maandelikse paalement indien die lening oor 5 jaar terugbetaal moet word.

17.3 die uitstaande balans op die lening na 2 jaar, net nadat Ernest die 24ste paalement betaal het.

$$\begin{aligned}
 17.1 \text{ Waarde van lening} &= R240\,000 - \text{deposito} \\
 &= R240\,000 - \left(\frac{20}{100} \times 240\,000\right) \quad [20\% \text{ deposito}] \\
 &= R240\,000 - R48\,000 \\
 &= \underline{R192\,000}
 \end{aligned}$$

$$17.2 \quad P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \quad [\text{Gebruik huidige waarde annuïteitsformule.}]$$

$$\therefore 192\,000 = \frac{x[1 - (1 + \frac{0,115}{12})^{-60}]}{\frac{0,115}{12}} \quad [P = 192\,000; \text{rente maandeliks saamgestel, dus } \frac{i}{12} \text{ en } n = 60]$$

$$\therefore 192\,000 \times \frac{0,115}{12} = x[1 - (1 + \frac{0,115}{12})^{-60}] \quad [\text{Maal met } \frac{0,115}{12}]$$

$$\therefore \frac{192\,000 \times \frac{0,115}{12}}{[1 - (1 + \frac{0,115}{12})^{-60}]} = x \quad [\text{Deel deur } [1 - (1 + \frac{0,115}{12})^{-60}]]$$

$$\therefore x = 4222,58$$

$$\therefore \underline{\text{Maandelikse paaient} = R4\,222,58}$$

17.3 Ons kan die uitstaande bedrag bereken op twee maniere :

'n Kort metode is om te bereken hoeveel paaienten na twee jaar nog uitstaande is en dan die huidige waarde annuïteitsformule te gebruik. Die lening was vir 5 jaar, dus na 2 jaar is daar nog 36 paaienten uitstaande.

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$\text{Uitstaande balans} = \frac{4222,58[1 - (1 + \frac{0,115}{12})^{-36}]}{\frac{0,115}{12}} \quad [36 \text{ paaienten uitstaande na 2 jaar}]$$

$$\text{Uitstaande balans} = \underline{R128\,050,07}$$

$$\text{Uitstaande bedrag} = (\text{Lening} + \text{rente}) - (\text{Maandelikse terugbetalings} + \text{rente})$$

Om die lening plus rente te bereken, gebruik formule vir saamgestelde rente. Die uitstaande bedrag na twee jaar moet bereken word, dus $n = 2 \times 12$

$$\underline{\text{Lening} + \text{rente}} = P(1 + i)^n$$

$$= 192\,000(1 + \frac{0,115}{12})^{24} \quad [P = 192\,000, n = 24]$$

$$= 241\,386,72$$

Om die maandelikse terugbetalings na twee jaar te bereken, gebruik ons die toekomstige waarde annuïteitsformule

$$\underline{\text{Maandelikse terugbetalings} + \text{rente}} = \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i} \quad [x = 4222,58, n = 24]$$

$$= \frac{4222,58[(1 + \frac{0,115}{12})^{24} - 1]}{\frac{0,115}{12}}$$

$$= 113\,336,61$$

$$\therefore \text{Uitstaande bedrag} = 241\,386,72 - 113\,336,61 = \underline{R128\,050,11}$$

Alhoewel daar 'n baie klein verskil is tussen die twee antwoorde, sal albei as korrek aanvaar word.

Voorbeeld 18

Vanessa neem 'n lening van R8 000 uit by 'n bank. Die rentekoers is 12% p. j, maandeliks saamgestel. Sy besluit om maandeliks 'n paaient van R750 te betaal.

18.1 Bereken die aantal paaienten wat nodig sal wees om die lening terug te betaal.

18.2 Wat sal die bedrag van die laaste paaient wees?

Oplossing

18.1 Onthou : n = die aantal paaieimente. Ons deel die rentekoers deur 12 maar maal nie n met 12 nie.

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$\therefore 8000 = \frac{750[1 - (1 + \frac{0,12}{12})^{-n}]}{\frac{0,12}{12}} \quad [\text{Die aantal paaieimente moet bereken word, daarom maal ons nie } n \text{ met 12 nie}]$$

$$\therefore 8000 \times 0,01 = 750[1 - (1 + 0,01)^{-n}] \quad [\frac{0,12}{12} = 0,01]$$

$$\therefore \frac{8000 \times 0,01}{750} = [1 - (1 + 0,01)^{-n}] \quad [\text{Deel deur 750}]$$

$$\therefore \frac{8000 \times 0,01}{750} - 1 = -(1 + 0,01)^{-n}$$

$$\therefore -0,89333... = -(1,01)^{-n}$$

$$\therefore 0,89333... = (1,01)^{-n} \quad [\text{Maal met } -1]$$

$$\therefore \log 0,89333... = -n \log 1,01 \quad [\text{Neem logs aan beide kante}]$$

$$\therefore -n = \frac{\log 0,89333}{\log 1,01}$$

$$\therefore -n = -11,335...$$

$$\therefore n = 11,335$$

$\therefore$ Daar sal 12 paaieimente betaal moet word.

18.2 Bereken eers die uitstaande balans na die 11^{de} betaling volgens die tweede metode in 17.3.

Uitstaande bedrag = (Lening + rente) – (Maandelikse terugbetalings + rente)

$$\therefore \text{Uitstaande bedrag} = P(1 + i)^n - \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i} \quad [\text{Sien voorbeeld 17.3}]$$

$$\therefore \text{Uitstaande bedrag} = 8000(1 + \frac{0,12}{12})^{11} - \frac{750[(1 + \frac{0,12}{12})^{11} - 1]}{\frac{0,12}{12}}$$

$$\therefore \text{Uitstaande bedrag} = 8000(1,01)^{11} - \frac{750[(1,01)^{11} - 1]}{0,01} \quad (1 + \frac{0,12}{12} = 0,01)$$
$$= R250,22$$

Onthou, Vanessa gaan die paaieiment eers aan die einde van die 12^{de} maand betaal, dus sal die laaste paaieiment = R250,22 + rente vir een maand.

$$\therefore \text{Finale paaieiment} = 250,22(1 + 0,01) = \underline{R252,72}$$

Let op : Vanessa nie het nie 12 gelyke maandelikse paaieimente betaal nie, maar 11 paaieimente van R750 en 'n laaste paaieiment van R252,72. Daarom kan ons nie die huidige waarde annuïteitsformule gebruik soos in die eerste metode in 17.3 nie.

Die maandelikse paaieiment op 'n lening van R8000 teen 12% rente is :

$$8000 = \frac{x[1 - (1 + \frac{0,12}{12})^{-12}]}{\frac{0,12}{12}} \quad \therefore x = \frac{8000 \times 0,01}{[1 - (1 + 0,01)^{-12}]} = R710,79$$

Sy het dus elke maand R39,21 meer betaal. Indien sy elke maand R710,79 betaal het, sou die uitstaande balans na 11 maande meer gewees het.

Voorbeeld 19

Sheldon ontvang R900 000 met sy aftrede. Hy belê die geld teen 'n rentekoers van 8,5% per jaar, maandeliks saamgestel. Hy onttrek maandeliks R10 000 vir eie gebruik. Die eerste bedrag word onttrek een maand nadat die geld belê is. Vir hoeveel maande sal hy hierdie bedrag kan onttrek?

Opossing

Wanneer maandelikse onttrekkings uit 'n belegging gemaak word, kan ons dit beskou as 'n lening wat die bank terugbetaal teen Rx per maand.

Wanneer maandelikse onttrekkings dus uit 'n belegging gemaak word, gebruik die huidige waarde annuïteitsformule met

P = die bedrag belê en x = die bedrag wat maandeliks onttrek word

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$\therefore 900000 = \frac{10000[1 - (1 + \frac{0,085}{12})^{-n}]}{\frac{0,085}{12}} \quad [R900\,000 \text{ word belê, } R10\,000 \text{ word maandeliks onttrek}]$$

$$\therefore \frac{900000 \times \frac{0,085}{12}}{10000} = 1 - (1 + \frac{0,085}{12})^{-n} \quad [Maal met \frac{0,085}{12}, \text{ deel deur } 10000]$$

$$\therefore \frac{900000 \times \frac{0,085}{12}}{10000} - 1 = -(1 + \frac{0,085}{12})^{-n} \quad [Neem 1 na LK]$$

$$\therefore -\frac{29}{80} = -(1 + \frac{0,085}{12})^{-n} \quad [Vereenvoudig LK]$$

$$\therefore \frac{29}{80} = (1 + \frac{0,085}{12})^{-n} \quad [Maal met -1]$$

$$\therefore \log \frac{29}{80} = \log(1 + \frac{0,085}{12})^{-n} \quad [Neem logs aan beide kante]$$

$$\therefore \log \frac{29}{80} = -n \log(1 + \frac{0,085}{12})$$

$$\therefore -n = \frac{\log \frac{29}{80}}{\log(1 + \frac{0,085}{12})}$$

$$\therefore -n = -143,76$$

$$\therefore n = 143,76$$

$$\therefore \text{Vir } 143 \text{ maande}$$

5. Vergelyk lenings- en beleggingsopsies

Voordat jy 'n lening aangaan of 'n annuïteit uitneem is dit goed om eers die verskillende opsies te vergelyk sodat jy 'n ingeligte besluit kan neem.

Voorbeeld 20

Jy wil graag 'n motor koop en moet R100 000 leen. Jy doen aansoek om 'n lening en die bank bied jou twee opsies:

Opsie 1 : 'n Lening teen 'n rentekoers van 24% p.j., maandeliks saamgestel, terugbetaalbaar in gelyke maandelikse paaielemente oor 'n periode van 4 jaar. Die eerste paaielement word betaal aan die einde van die eerste maand.

Opsie 2 : 'n Lening teen 'n rentekoers van 22% p.j., maandeliks saamgestel, terugbetaalbaar in gelyke maandelikse paaielemente oor 'n periode van 5 jaar, die eerste paaielement betaalbaar aan die einde van die eerste maand.

20.1 Bereken in elke geval :

20.1.1 die maandelikse paaielement.

20.1.2 die totale bedrag wat terugbetaal word.

20.2 Watter opsie is die beste? Motiveer jou antwoord.

Oplossing

20.1.1 Opsie 1

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \quad [P = 100000, \frac{i}{12} = \frac{0,24}{12} = 0,02, n$$

$$\therefore 100000 = \frac{x[1 - (1 + 0,02)^{-48}]}{0,02}$$

$$\therefore 100000 \times 0,02 = x[1 - (1,02)^{-48}] \quad [\text{Maal met } 0,02]$$

$$\therefore \frac{100000 \times 0,02}{[1 - (1,02)^{-48}]} = x \quad [\text{Deel deur } (1 - (1,02)^{-48})]$$

$$\therefore x = 3260,18 \quad \therefore \underline{R3\,260,18 \text{ per maand.}}$$

Opsie 2

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$\therefore 100000 = \frac{x[1 - (1 + \frac{0,22}{12})^{-60}]}{\frac{0,22}{12}} \quad [P = 100000; \frac{i}{12} = \frac{0,22}{12}; n = 60]$$

$$\therefore 100000 \times \frac{0,22}{12} = x[1 - (\frac{611}{600})^{-60}] \quad [1 + \frac{0,22}{12} = \frac{611}{600}]$$

$$\therefore \frac{100000 \times \frac{0,22}{12}}{[1 - (\frac{611}{600})^{-60}]} = x$$

$$\therefore x = 2761,89 \quad \therefore \underline{R2\,761,89 \text{ per maand}}$$

$$20.1.2 \text{ Opsie 1 } \quad 3260,18 \times 48 = \underline{R156\,488,64}$$

$$\text{Opsie 2 } \quad 2761,89 \times 60 = \underline{R165\,713,40}$$

20.2 *Opsie 1 is die beste. R9 224,76 minder word terugbetaal.*

6. **Mikrolenings**

Mikroleners bied korttermyn lenings teen baie hoë rentekoerse aan. Baie mense is egter verplig om van mikroleners gebruik te maak wanneer hulle kontant dringend nodig het en hulle om een of ander rede nie kwalifiseer vir 'n lening by 'n ander finansiële instelling nie.

Die rente word bereken vir die volle termyn teen 'n enkelvoudige rentekoers. Daar is tans baie streng wetgewing wat die geldverskaffers en die geldleners beskerm.

Dit is baie belangrik dat jy die leningsooreenkoms duidelik verstaan en vergelyk met ander moontlike opsies voordat jy 'n besluit neem.

7. **Piramideskemas**

Piramideskemas word deur wetgewing verbied. Volgens 'n piramidaskema betaal 'n groot aantal mense wat aan die onderpunt van die piramide is, geld aan enkele persone aan die bopunt van die piramide. Die belofte is dan ook gewoonlik dat jy duisende rande gaan ontvang wanneer jou naam aan die bopunt is. In die praktyk stort die piramide egter gewoonlik in duie lank voordat jou naam aan die bopunt is. Baie mense het al duisende rande met piramideskemas verloor.

Wanneer word watter formule gebruik?'n Eenmalige betaling vir 'n sekere tydperk word gemaak

teen enkelvoudige rente : $A = P(1 + in)$

teen saamgestelde rente : $A = P(1 + i)^n$

Waardevermindering vind plaas

volgens die reguitlyn metode : $A = P(1 - in)$

volgens die verminderde-saldo metode : $A = P(1 - i)^n$

Spaar deur gereelde, gelyke betalings

Toekomstige waarde annuïteit : $F = \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i}$

Onthou : n = aantal betalings gemaak. Die eerste betaling word gewoonlik aan die einde van die eerste maand gemaak. As 'n betaling egter dadelik gemaak word, tel net daardie betaling by.

Wanneer 'n sekere bedrag elke jaar uit 'n belegging onttrek word, gebruik die toekomstige waarde annuïteitsformule en bereken die maandelikse betalings wat nodig is om aan die einde van die jaar die bedrag beskikbaar te hê. In hierdie geval is $n = 12$. Kyk na voorbeeld 8.

Terugbetalings op lenings

Huidige waarde annuïteit : $P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$

Uitstaande bedrag op 'n lening

Uitstaande bedrag = (lening + rente) - (maandelikse terugbetalings + rente)
 $= P(1 + i)^n - \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i}$

of

Gebruik huidige waarde annuïteitsformule met n = die aantal uitstaande paalemente. Hierdie metode kan egter net gebruik word as gelyke maandelikse terugbetalings gemaak word.

Kyk na Voorbeelde 17 en 18.

'n Vaste bedrag word maandeliks uit 'n belegging onttrek

Beskou dit as 'n lening wat die bank terugbetaal en gebruik die formule :

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

Kyk na voorbeeld 19.