ALGEBRAÏESE UITDRUKKINGS

Hersien eers die werk wat in Graad 8 behandel is en maak seker dat jy al die voorbeelde in die Graad 8 handleiding kan doen.

1. VERMENIGVULDIG ENKELTERME MET VEELTERME

Verlede jaar het jy die produk van 'n eenterm en 'n tweeterm bepaal deur die eenterm te vermenigvuldig met elke term van die tweeterm. Byvoorbeeld:

$-2x(x-2) = -2x^2 + 4x$ $\quad [-2x \times x = 2x^2 \text{ en } -2x \times -2 = 4x]$

$(2a-b)3a = 6a^2 - 3ab$ $\quad [2a \times 3a = 6a^2 \text{ en } -b \times 3a = -3ab]$

Voorbeeld 1

Vereenvoudig:

a) $2x(x-2) - 3(x^2 - 5x - 3)$

b) $5a(a-1) - 3(a^2+1) - 4(1-a)$

Onthou:
$(+)\times(+) = +$
$(-)\times(-) = +$
$(+)\times(-) = -$

Oplossing

a) $2x(x-2) - 3(x^2 - 5x - 3)$

$= 2x^2 - 4x - 3x^2 + 15x + 9$ $\quad \left[\begin{matrix}\textit{Vermenigvuldig elke term binne} \\ \textit{hakies met term voor hakies}\end{matrix}\right]$

$= 2x^2 - 3x^2 - 4x + 15x + 9$ $\quad [\textit{Groepeer gelyksoortige terme}]$

$\underline{= -x^2 + 11x + 9}$ $\quad [\textit{Tel gelyksoortige terme bymekaar}]$

b) $5a(a-1) - 3(a^2+1) - 4(1-a)$

$= 5a^2 - 5a - 3a^2 - 3 - 4 + 4a$ $\quad \left[\begin{matrix}\textit{Vermenigvuldig deur distributiewe} \\ \textit{wet te gebruik}\end{matrix}\right]$

$= 5a^2 - 3a^2 - 5a + 4a - 3 - 4$ $\quad [\textit{Groepeer gelyksoortige terme}]$

$\underline{= 2a^2 - a - 7}$ $\quad [\textit{Tel gelyksoortige terme bymekaar}]$

2. DIE PRODUK VAN TWEE TWEETERME

Om die produk van twee tweeterme te bepaal, word elke term binne die eerste hakie vermenigvuldig met elke term binne die tweede hakie.

Voorbeeld 2

Vereenvoudig: a) $(3a-2)(4a-3)$ b) $(2x-5y)(x+3y)$

Oplossing

$(3a-2)(4a-3)$ $\quad \left[\begin{matrix}\textit{Elke term in die eerste hakie} \\ \textit{moet vermenigvuldig word met} \\ \textit{elke term in die tweede hakie}\end{matrix}\right]$

$= 3a(4a-3) - 2(4a-3)$ $\quad \left[\begin{matrix}\textit{Vermenigvuldig eerste term van eerste} \\ \textit{hakie met elke term in die tweede hakie} \\ \textit{en dan tweede term van eerste hakie} \\ \textit{met elke term in die tweede hakie}\end{matrix}\right]$

$= 12a^2 - 9a - 8a + 6$ $\quad \left[\begin{matrix}3a \times 4a = 12a^2 \text{ en } 3a \times -3 = -9a; \\ -2 \times 4a = -8a \text{ en } -2 \times -3 = 6\end{matrix}\right]$

$\underline{= 12a^2 - 17a + 6}$ $\quad [\textit{Tel gelyksoortige terme bymekaar}]$

b) $(2x-5y)(x+3y)$

$= 2x(x+3y) - 5y(x+3y)$ $\quad \left[\begin{matrix}(2x) \times \textit{elke term van tweede hakie en} \\ \textit{dan } (-5y) \times \textit{elke term van tweede hakie}\end{matrix}\right]$

$= 2x^2 + 6xy - 5xy - 15y^2$

$=\underline{2x^2 + xy - 15y^2}$

Let op na die volgorde waarin die vermenigvuldiging gedoen word:

1 ***E**erste terme van elke hakie*

2 ***B**uitenste terme van elke hakie*

3 ***B**inneste terme van elke hakie*

4 ***L**aaste terme van elke hakie*

$$(2x - 5y)(x + 3y)$$

E
B
B
L

Voorbeeld 3

Vereenvoudig:

a) $(3x - 4)(2x + 3)$
b) $-(2x - y)(5x - 3y)$

Oplossing

$a)\quad (3x - 4)(2x + 3)$ $\left[\begin{array}{l} EBBL:\ eerstes(E),\ buitenstes\ (B), \\ binnestes\ (B),\ laastes\ (L) \end{array}\right]$

$= 6x^2 + 9x - 8x - 12$ $\left[\begin{array}{l} 3x \times 2x = 6x^2;\ 3x \times 3 = 9x; \\ -4 \times 2x = -8x\ ;\ -4 \times 3 = -12 \end{array}\right]$

$\underline{= 6x^2 + x - 12}$

$b)\quad -(2x - y)(5x - 3y)$ $\left[\begin{array}{l} 2x \times elke\ term\ in\ 2de\ hakie, \\ -y\ \times elke\ term\ in\ 2de\ hakie \end{array}\right]$

$= -(10x^2 - 6xy - 5xy + 3y^2)$ $\left[\begin{array}{l} Hou\ die\ hakies\ om\ die\ tweeterme \\ terwyl\ jy\ vermenigvuldig \end{array}\right]$

$= -(10x^2 - 11xy + 3y^2)$ $[Tel\ gelyksoortige\ terme\ bymekaar]$

$\underline{= -10x^2 + 11xy - 3y^2}$ $\left[\begin{array}{l} Vermenigvuldig\ nou\ elke\ term\ met \\ -1, die\ getal\ voor\ die\ hakies \end{array}\right]$

Voorbeeld 4

Vereenvoudig: $(2x - 3y)(3x - 2y) - (4x + y)(x - 4y)$

Oplossing

$(2x - 3y)(3x - 2y) - (4x + y)(x - 4y)$ $\left[\begin{array}{l} Onthou: EBBL \rightarrow hou\ hakies \\ om\ die\ laaste\ tweeterme \\ terwyl\ jy\ vermenigvuldig \end{array}\right]$

$= 6x^2 - 4xy - 9xy + 6y^2 - (4x^2 - 16xy + xy - 4y^2\ )$

$= 6x^2 - 4xy - 9xy + 6y^2 - 4x^2 + 16xy - xy + 4y^2$ $\left[\begin{array}{l} Vermenigvuldig \\ met - 1 \end{array}\right]$

$\underline{= 2x^2 + 2xy + 10y^2}$ $[Tel\ gelyksoortige\ terme\ bymekaar]$

Om 'n tweeterm te kwadreer beteken om die tweeterm met homself te vermenigvuldig. Dus is:

$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ $[Skryf\ die\ hakie\ twee\ maal]$

$= x^2 + 2x + 2x + 4$ $\left[\begin{array}{l} Vermenigvuldig: eerstes, \\ buitenstes, binnestes, laastes \end{array}\right]$

$= x^2 + 4x + 4$

Voorbeeld 5

Vereenvoudig: $(2x - y)^2$

Oplossing

$(2x - y)^2$
$= (2x - y)(2x - y)$ $[Skryf\ hakie\ twee\ maal]$
$= 4x^2 - 2xy - 2xy + y^2$ $[Vermenigvuldig\ hakies]$
$\underline{= 4x^2 - 4xy + y^2}$ $[Tel\ gelyksoortige\ terme\ bymekaar]$

'n Korter manier om 'n tweeterm te kwadreer:

$$(2x-y)^2$$
$$= 4x^2 - 4xy + y^2$$
$$= (2x)^2 + 2(-2x)(y) + (-y)^2 \quad \left[\begin{array}{l} 4x^2 = (2x)^2;\ \ -4xy = 2(-2x)(y) \\ en\ y^2 = (-y)^2 \end{array}\right]$$

$$= (eerste\ term)^2 + (2 \times\ eerste\ term \times tweede\ term) + (tweede\ term)^2$$

Jy mag die metode gebruik wat jy verkies.

<u>Voorbeeld 6</u>

Vereenvoudig: $(2x-3y)^2$

<u>Oplossing</u>

$$(2x-3y)^2$$
$$= (2x)^2 + (2)(2x)(-3y) + (-3y)^2 \quad \left[\begin{array}{l} (1ste\ term)^2 + (2)(1ste)(2de) \\ +(2de\ term)^2 \end{array}\right]$$
$$\underline{= 4x^2 - 12xy + 9y^2}$$

<u>Voorbeeld 7</u>

Bepaal die produkte van die volgende:

a) $(x+2)(x-2)$ b) $(2a+3)(2a-3)$

<u>Oplossing</u>

a) $(x+2)(x-2)$

$$= x^2 - 2x + 2x - 4 \quad \left[\begin{array}{l} Eerste\ terme, buitenste\ terme, \\ binneste\ terme\ dan\ laaste\ terme \end{array}\right]$$
$$\underline{= x^2 - 4}$$

b) $(2a+3)(2a-3)$

$$= 4a^2 - 6a + 6a - 9 \quad \left[\begin{array}{l} Eerstes, buitenstes, \\ binnestes, laastes \end{array}\right]$$
$$\underline{= 4a^2 - 9}$$

Let op: In (a) en (b) hierbo is die eerste terme van die twee tweeterme dieselfde en die tweede terme is ook dieselfde maar slegs die tekens verskil.

Die produk van twee tweeterme waarvan:
die **eerste terme** dieselfde is

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

en die **tweede terme** dieselfde is, maar net die tekens verskil,
$= (eerste\ term)^2 - (tweede\ term)^2$

<u>Voorbeeld 8</u>

Vereenvoudig: a) $(3a+2b)(3a-2b)$ b) $(2a-\frac{1}{3})(2a+\frac{1}{3})$

<u>Oplossing</u>

a) $(3a+2b)(3a-2b)$
$$= (3a)^2 - (2b)^2 \quad [(eerste\ term)^2 - (tweede\ term)^2]$$
$$\underline{= 9a^2 - 4b^2}$$

b) $(2a-\frac{1}{3})(2a+\frac{1}{3})$
$$= (2a)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad [(eerste\ term)^2 - (tweede\ term)^2]$$
$$\underline{= 4a^2 - \frac{1}{9}}$$

Voorbeeld 9

Vereenvoudig: $2(x-2)^2 - 3(4x-3)(4x+3)$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
& 2(x-2)^2 - 3(4x-3)(4x+3) \\
= \; & 2(x-2)(x-2) - 3(4x-3)(4x+3) \quad [(x-2)^2 = (x-2)(x-2)] \\
= \; & 2(x^2 - 2x - 2x + 4) - 3((4x)^2 - (3)^2) \; [\textit{Vermenigvuldig hakies}] \\
= \; & 2(x^2 - 2x - 2x + 4) - 3(16x^2 - 9) \\
= \; & 2x^2 - 4x - 4x + 8 - 48x^2 + 27 \quad \begin{bmatrix} \textit{Vermenigvuldig met} \\ \textit{heelgetalle voor hakies} \end{bmatrix} \\
= \; & \underline{-46x^2 - 8x + 35}
\end{aligned}
$$

3. FAKTORISERING

Faktorisering is die omgekeerde proses van die ontwikkeling van produkte. Die **produk** van $x(x+3) = x^2 + 3x$ terwyl die **faktore** van $x^2 + 3x = x(x+3)$.

3.1 Faktorisering deur die gemene faktor uit te haal

3.1.1 Gemene faktor van die vorm $\boldsymbol{ax+bx+cx}$

Die uitdrukking $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$ bestaan uit twee terme en $\boldsymbol{x}$ is 'n faktor van beide terme. Daarom noem ons $\boldsymbol{x}$ die **gemene** of **gemeenskaplike** faktor.

Om nou $ax + bx$ te faktoriseer:
Skryf die gemene faktor en dan 'n hakie: $ax + bx = x(\quad)$
Deel elke term deur x, die gemene faktor: $ax + bx = x(\frac{ax}{x} + \frac{bx}{x})$
$\underline{\therefore ax + bx = x(a+b)}$

Wanneer jy 'n uitdrukking moet faktoriseer:
* Kyk altyd eers of daar 'n gemene faktor in elke term is.
* Skryf die gemene faktor voor 'n hakie.
* Deel elke term van die uitdrukking deur die gemene faktor.

Voorbeeld 10

Faktoriseer die volgende deur 'n gemene faktor uit te haal:

a) $6x + 8y$ b) $13a - 13ab$ c) $4xy + 12yz - 8xyz$

d) $9ax^3 - 6ax^2 + 3ax$ e) $2a^2bc - 12ab^2$

Oplossing

a) $6x + 8y$
$\underline{= 2(3x + 4y)}$ $\begin{bmatrix} 2 \textit{ is die grootste gemene faktor}: \\ 6x \div 2 = 3x \textit{ en } 8y \div 2 = 4y \end{bmatrix}$

b) $13a - 13ab$
$\underline{13a(1-b)}$ $\begin{bmatrix} 13a \textit{ is die gemene faktor} \rightarrow \textit{Let op}: \\ 13a \div 13 = 1 \textit{ en } -13ab \div 13a = -b \end{bmatrix}$

c) $4xy + 12yz - 8xyz$
$\underline{= 4y(x + 3z - 2xz)}$ $\begin{bmatrix} \textit{Gemene faktor is } 4y; 4xy \div 4y = x; \\ 12yz \div 4y = 3z;\; -8xyz \div 4y = -2z \end{bmatrix}$

d) $9ax^3 - 6ax^2 + 3ax$
$\underline{= 3ax(3x^2 - 2x + 1)}$ $\begin{bmatrix} \textit{Gemene faktor } 3ax \rightarrow 9ax^3 \div 3ax = 3x^2; \\ -6ax^2 \div 3ax = -2x; \textit{en } 3ax \div 3ax = 1 \end{bmatrix}$

e) $2a^2bc - 12ab^2$
$\underline{= 2ab(ac - 6b)}$ $[\textit{Grootste gemene faktor} = 2ab]$
$\left[\frac{2a^2bc}{2ab} = ac \textit{ en } \frac{-12ab^2}{2ab} = -6b\right]$

In die eerste kolom van die volgende tabel is die faktorisering gedeeltelik gedoen. Kyk of jy dit self kan voltooi. Die antwoord is in die tweede kolom. Hou die regterkant eers toe en probeer self!

1. $x^3y^2 + x^2y$ $= x^2y(\qquad\qquad)$	$= x^2y(xy + 1)$
2. $25p^2q - 20pq$ $= 5pq(\qquad\qquad)$	$= 5pq(5p - 4)$
3. $e^2fg - ef^2g - efg^2$ $= efg(\qquad\qquad)$	$= efg(e - f - g)$
4. $6x^4 - 3x^2 + 9xy$ $=$ -----$(2x^3 - x + 3y)$	$= 3x\,(2x^3 - x + 3y)$
5. $4a^2b^2 + 2ab^2 - 6a^2b$ $=$ -----$(2ab + b - 3a)$	$= 2ab(2ab + b - 3a)$
6. $3bx + 12by - 6bz$ $= 3b(\qquad\qquad)$	$= 3b(x + 4y - 2z)$
7. $7a^3 - 14a^2 + 28a$ $=$ ------$(a^2 - 2a + 4)$	$= 7a(a^2 - 2a + 4)$
8. $4x^4 - 2x^3y + 8x^2y^2$ $=$ -----$(2x^2 - xy + 4y^2$	$= 2x^2(2x^2 - xy + 4y^2)$
9. $3abc^2 - 9abc - 15a^2c^2$ $= 3ac(\qquad\qquad)$	$= 3ac(bc - 3b - 5ac)$
10. $-2x^2y - 8xy^2 + 12xy$ $= -2xy(\qquad\qquad)$	$= -2xy(x + 4y - 6)$
11. $9p^2q^3z^2 - 6p^3q^2z^3$ $=$ -----$(3q - 2pz)$	$= 3p^2q^2z^2(3q - 2pz)$
12. $-3a^2b^3c + 12ca^2b^2 - 21bca^2$ $=$ -----$(b^2 - 4b + 7)$	$= -3a^2bc(b^2 - 4b + 7)$
13. $0{,}3x^3y^2 - 0{,}6xy + 0{,}09xy^2$ $= 0{,}3xy(\qquad\qquad)$	$= 0{,}3xy(x^2y - 2 + 0{,}3y)$

3.1.2 <u>Gemeenskaplike faktor van die vorm $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{y}$</u>

Die gemeenskaplike faktor kan ook ’n tweeterm of selfs drieterm wees. In die uitdrukking $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - 3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ is die gemene faktor die tweeterm $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$.

<u>Voorbeeld 11</u>

Ontbind in faktore: $3x(3x-2y) - (3x-2y)$

<u>Oplossing</u>

$3x(3x-2y) - (3x-2y)$ $\qquad$ $[Gemene\ faktor = (3x-2y)]$

$\underline{= (3x-2y)(3x-1)}$ $\qquad$ $\left[\frac{-(3x-2y)}{(3x-2y)} = -1,\ onthou\ die\ -1\right]$

$$-(b-a) = -b + a = (a-b).$$
$$Wanneer\ die\ teken$$
$$voor\ die\ hakie\ verander, verander\ die\ tekens\ binne\ die\ hakie\ ook.$$
$$Net\ so\ is\ (2y-x) = -(x-2y)$$
$$Let\ op{:}\ -x\ verander\ na + x\ en + 2y\ verander\ na - 2y\ binne\ die\ hakie.$$

<u>Voorbeeld 12</u>

Ontbind in faktore: $2x(3p-w) + 5y(w-3p)$

<u>Oplossing</u>

$2x(3p-w) + 5y(w-3p)$

$= 2x(3p-w) - 5y(-w+3p)$ $\qquad$ $\left[\begin{matrix}Verander + 5y\ na - 5y\ en\\ verander\ tekens\ binne\ die\ hakie\end{matrix}\right]$

$= 2x(3p-w) - 5y(3p-w)$ $\qquad$ $[(-w+3p) = (3p-w)]$

$\underline{= (3p-w)(2x-5y)}$ $\qquad$ $[Gemene\ faktor\ is\ (3p-w)]$

Probeer nou die kolom op die volgende bladsy self voltooi.

1. $x(a+b)+2(a+b)$ $=(a+b)(\qquad)$	Moenie dadelik na die antwoorde kyk nie! $=(a+b)(x+2)$
2. $x(p+q)-y(q+p)$ $=(p+q)(\qquad)$	$=(p+q)(x-y)$ Onthou: $(p+q)=(q+p)$
3. $4p(2p-3q)-(2p-3q)$ $=(2p-3q)(\qquad)$	$=(2p-3q)(4p-1)$ $-(2p-3q)\div(2p-3q)=-1$
4. $3f(g-e)-g^2(g-e)$ $=(g-e)(\qquad)$	$=(g-e)(f-g^2)$
5. $9x(5a-b)+2(b-5a)$ $=9x(5a-b)-2(\qquad)$ $=(5a-b)(\qquad)$	$=9x(5a-b)-2\,(5a-b)$ $=(5a-b)(9x-2)$
6. $4a(b-2)+3(2-b)$ $=4a(b-2)-3(\qquad)$ $=(b-2)(\qquad)$	$=4a(b-2)-3(b-2)$ $=(b-2)(4a-3)$
7. $3b(x-y)-6c(y-x)$ $=3b(x-y)+6c(\qquad)$ $=(x-y)(\qquad)$ $=3(x-y)(\qquad)$	$=3b(x-y)+6c(x-y)$ $=(x-y)(3b+6c)$ $=3(x-y)(b+2c)$
8. $(3ab^2-9ab)-(b-3)$ $=3ab(\qquad)-(b-3)$ $=(b-3)(\qquad)$	$=3ab(b-3)-(b-3)$ $=(b-3)(3ab-1)$
9. $x(3ab-9ac)+y(3c-b)$ $=3ax(\qquad)-y(\qquad)$ $=(b-3c)(\qquad)$	$=3ax(b-3c)-y(b-3c)$ $=(b-3c)(3ax-y)$
10. $(25ab-15a)-(15b-9)$ $=5a(\qquad)-3(\qquad)$ $=(\qquad)(5a-3)$	$=5a(5b-3)-3(5b-3)$ $=(5b-3)(5a-3)$

3.3 Die verskil tussen twee vierkante

Ons weet dat $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$

Omgekeerd is $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$$=(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2})(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})$$

Let op: x^2 is 'n volkome vierkant en y^2 is 'n volkome vierkant.
Die verskil tussen twee vierkante kan dus gefaktoriseer word as:

$$(\sqrt{\mathbf{1ste\ term}}-\sqrt{\mathbf{2de\ term}})(\sqrt{\mathbf{1ste\ term}}+\sqrt{\mathbf{2de\ term}})$$

Voorbeeld 13

Faktoriseer: a) $9x^2-4$ b) $-a^4b^2+9$

c) $8x-18x^3$ d) $\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{25}$

Oplossing

a) $9x^2-4$ $\left[\begin{array}{l}9x^2\ en\ 4\ is\ vierkante, dus\ \text{die}\\ verskil\ tussen\ twee\ vierkante\end{array}\right]$

$\underline{=(3x-2)(3x+2)}$ $[\sqrt{9x^2}=3x\ \ en\ \ \sqrt{4}=2]$

b) $-a^4b^2+16$

$=(-a^4b^2+16)$

$=-(a^4b^2-16)$ $[Ruil\ die\ tekens\ om]$

$\underline{=-(a^2b-4)(a^2b+4)}$ $[\sqrt{a^4b^2}=a^2b\ \ en\ \sqrt{16}=4]$

c) $8x-18x^3$

$=2x(4-9x^2)$ $[Haal\ eers\ die\ gemene\ faktor\ uit]$

$\underline{=2x(2-3x)(2+3x)}$ $\left[\begin{array}{l}\text{4 en } 9x^2\ is\ vierkante, faktoriseer\\ as\ verskil\ tussen\ twee\ vierkante\end{array}\right]$

d) $\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{25}$

$\underline{=(\frac{1}{3}x-\frac{2}{5})(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5})}$ $\left[(\sqrt{\frac{1}{9}x^2}-\sqrt{\frac{4}{25}})(\sqrt{\frac{1}{9}x^2}+\sqrt{\frac{4}{25}}\right]$

Probeer nou om die eerste kolom van die tabel te voltooi. Moenie dadelik va die oplossing in die tweede kolom kyk nie, probeer eers self!

1. $x^4 - 25y^2$ $= (\quad\quad)(\quad\quad)$	$= (x^2 - 5y)(x^2 + 5y)$
2. $25p^4 - q^8r^6$ $= (\quad\quad)(\quad\quad)$	$= (5p^2 - q^4r^3)(5p^2 + q^4r^3)$
3. $e^5 - ef^2$ $= e(\quad\quad)$ $= e(\quad\quad)(\quad\quad)$	$= e(e^4 - f^2)$ $= e(e^2 - f)(e^2 + f)$
4. $8x^4 - 18y^2$ $= 2(\quad\quad)$ $= 2(\quad\quad)(\quad\quad)$	$= 2(4x^4 - 9y^2)$ $= 2(2x^2 - 3y)(2x^2 + 3y)$
5. $36a^2 - 36b^2$ $= 36(\quad\quad)$ $= 36(\quad\quad)(\quad\quad)$	$= 36(a^2 - b^2)$ $= 36(a - b)(a + b)$
6. $3bx^8 - 12by^6$ $= 3b(\quad\quad)$ $= 3b(\quad\quad)(\quad\quad)$	$= 3b(x^8 - 4y^6)$ $= 3b(x^4 - 2y^3)$
7. $a^2 - \frac{1}{9}$ $= (\quad\quad)(\quad\quad)$	$= (a - \frac{1}{3})(a + \frac{1}{3})$
8. $-\frac{16}{a^2} + 1$ $= -(\quad\quad)$ $= -(\quad\quad)(\quad\quad)$	$= -(\frac{16}{a^2} - 1)$ $= -(\frac{4}{a} - 1)(\frac{4}{a} + 1)$
9. $5 - 5a^4$ $= 5(\quad\quad)$ $= 5(\quad\quad)(\quad\quad)$ $= 5(\quad\quad)(\quad\quad)(\quad\quad)$	$= 5(1 - a^4)$ $= 5(1 - a^2)(1 + a^2)$ $= 5(1 - a)(1 + a)(1 + a^2)$

4. Faktore van die drieterm in die vorm $x^2 + bx + c$

Ons weet dat $(x + 4)(x + 3) = x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$.
Die produk van twee tweeterme is gewoonlik 'n drieterm en dus sal die faktore van 'n drieterm twee tweeterme wees.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$
$$= x^2 + x(a + b) + ab$$
$$= x^2 + x(som\ van\ a\ en\ b) + (produk\ van\ a\ en\ b)$$

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$$
$$= x^2 + x(3 + 5) + (3 \times 5)$$

Om die faktore van $x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ te bepaal, vind twee faktore van $\mathbf{c}$ waarvan die som gelyk is aan $\mathbf{b}$.

Om die faktore van $x^2 - \mathbf{5}x + \mathbf{6}$ te bepaal, vind twee faktore van $\mathbf{6}$ waarvan die som $-\mathbf{5}$ is.

As die laaste term positief is, is die tekens binne die hakies dieselfde .

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ $\quad$ $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Die tekens binne die hakies is dieselfde as die teken van die middelterm.

As die laaste term negatief is, verskil die tekens binne die hakies .

$x^2 + 5x - 6 = (x + 5)(x - 1)$ $\quad$ $x^2 - 4x - 8 = (x - 4)(x + 2)$

Voorbeeld 14

Faktoriseer volledig:

a) $x^2 + 9x + 18$ $\quad$ b) $x^2 - 8x + 15$
c) $p^2 + p - 30$ $\quad$ d) $y^2 - 5y - 24$

Oplossing

a) $x^2 + 9x + 18$

Som van faktore: +9

1×18
2×9
3×6

$\left[\textit{Die laaste term is } + \textit{, tekens binne die hakies is eenders, middelterm is } +\textit{, die tekens binne hakies albei } +\right]$

$= \underline{(x+6)(x+3)}$

$\left[3 \times 6 = 18 \textit{ en } 3 + 6 = 9\textit{; dus 3 en 6 is die regte kombinasie}\right]$

b) $x^2 - 8x + 15$

Som van faktore: -8

1×15
3×5

$\left[\textit{Die laaste term is positief, tekens binne hakies is dieselfde; middelterm is negatief, albei tekens dus negatief}\right]$

$= \underline{(x-3)(x-5)}$

$\left[3 \times 5 = 15 \textit{ en } 3 + 5 = 8 : \textit{Tekens moet negatief wees want die som van die faktore moet } -8 \textit{ wees}\right]$

c) $p^2 + p - 30$

Som van faktore: +1

1×30
2×15
3×10
5×6

$\left[\textit{Die laaste term is negatief, die tekens binne hakies verskil}\right]$

$= \underline{(x+6)(x-5)}$

$\left[5 \times -6 \textit{ is die regte kombinasie; } +6 - 5 = 1 \textit{ en } 5 \times -6 = -30\right]$

d) $y^2 - 5y - 24$

$\left[\textit{Die laaste term is negatief, tekens binne hakies verskil}\right]$

$\boxed{1 \times 24;\ 2 \times 12;\ (3 \times 8);\ 4 \times 6}$

$= \underline{(y+3)(y-8)}$

$\left[3 \times -8 \textit{ is die regte kombinasie; } +3 - 8 = -5 \textit{ en } 3 \times -8 = -24\right]$

Voltooi weer die eerste kolom. Skryf die faktore van die laaste term in die middelste kolom en soek die regte kombinasie .

1. $x^2 - 11x + 24$ $= (\ x-8\ )(\ x-3)$	1×24 ; 2×12 3×8; 4×6	$3 + 8 = 11$ Die tekens is albei –
2. $a^2 + 8a + 12$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= (a+6)(a+2)$
3. $p^2 - 5p - 14$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= (p-7)(p+2)$
4. $m^2 + 4m - 12$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= (m+6)(m-2)$
5. $x^2 + 11x + 28$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= (x+7)(x+4)$
6. $3x^2 - 15x - 18$ $= 3(\qquad\qquad)$ $= 3(\qquad)(\qquad)$		$= 3(x^2 - 5x - 6)$ $= 3(x-6)(x+1)$
7. $x^2 - 3x - 28$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= (x-7)(x+4)$
8. $6a^2 - 48a - 120$ $= 6(\qquad\qquad)$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= 6(a^2 - 8a - 20)$ $= 6(a-10)(a+2)$
9. $y^2 - 8y + 7$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= (y-7)(y-1)$
10. $x^2 - 8x + 16$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= x-4)(x-4)$
11. $x^2 + 4x - 21$ $= (\qquad)(\qquad)$		$= (x+7)(x-3)$
12. $3m^2 - 27m + 24$ $= 3(\qquad\qquad)$ $= 3(\qquad)(\qquad)$		$= 3(m^2 - 9m + 8)$ $= 3(m-8)(m-1)$

4. GEBRUIK FAKTORISERING OM BREUKE TE VEREENVOUDIG

Voordat jy algebraïese breuke vereenvoudig, faktoriseer eers die tellers en noemers **volledig.**

Byvoorbeeld: $\frac{3x-6}{3x-9} = \frac{\cancel{3}(x-2)}{\cancel{3}(x-3)} = \frac{(x-2)}{(x-3)}$ **maar:** $\frac{\cancel{3x}-6}{\cancel{3x}-9} \neq \frac{-6}{-9} \neq \frac{2}{3}$

Gelyke terme in teller en noemer mag nie gekanselleer word nie, slegs gelyke faktore in teller en noemer.

Voorbeeld 15

Vereenvoudig die volgende:

a) $\frac{x^2-2x-15}{2x^2-50}$ b) $\frac{2a-2ab}{ab-a}$

c) $\frac{5a+5b+5c}{5a-10} \times \frac{a^2-3a-10}{pa+pb+pc}$ d) $\frac{x^2+2x}{2x^2-6x} \div \frac{x^2-4}{2x-4}$

Oplossing

a) $\frac{x^2-2x-15}{2x^2-50}$

$= \frac{(x-5)(x+3)}{2(x^2-25)}$ $\left[\begin{array}{l} Faktoriseer\ teller \rightarrow -5 \times 3 = 15\ \ en \\ -5+3=-2\ \ dus\ \ (x-5)(x+3); \\ haal\ \ 2\ uit\ as\ gemene\ faktor\ in\ noemer \end{array}\right]$

$= \frac{\cancel{(x-5)}(x+3)}{2\cancel{(x-5)}(x+5)}$ $\left[\begin{array}{l} Faktoriseer\ noemer\ verder \rightarrow verskil \\ tussen\ twee\ vierkante,\ nou\ kan\ jy \\ gelyke\ faktore\ kanselleer \end{array}\right]$

$= \underline{\frac{(x+3)}{2(x+5)}}$

b) $\frac{2a-2ab}{ab-a}$

$= \frac{2a(1-b)}{a(b-1)}$ $[Faktoriseer\ teller\ en\ noemer]$

$= \frac{-2\cancel{a}\cancel{(b-1)}}{\cancel{a}\cancel{(b-1)}}$ $\left[\begin{array}{l} Verander\ (1-b)na\ (b-1)\ en \\ kanselleer\ gemene\ faktore \end{array}\right]$

$\underline{= -2}$

c) $\frac{5a+5b+5c}{5a-10} \times \frac{a^2+3a-10}{pa+pb+pc}$

$= \frac{\cancel{5(a+b+c)}}{\cancel{5(a-2)}} \times \frac{\cancel{(a-2)}(a+5)}{p\cancel{(a+b+c)}}$ $\left[\begin{array}{l} Faktoriseer\ al\ die\ tellers\ en\ noemers \\ en\ kanselleer\ gemene\ faktore \end{array}\right]$

$= \underline{\frac{(a+5)}{p}}$

d) $\frac{x^2+2x}{2x^2-6x} \div \frac{x^2-4}{2x-4}$

$= \frac{x^2+2x}{2x^2-6x} \times \frac{2x-4}{x^2-4}$ $[Verander\ \div na\ \times en\ draai\ breuk\ om]$

$= \frac{\cancel{x(x+2)}}{\cancel{2x}(x-3)} \times \frac{\cancel{2(x-2)}}{\cancel{(x-2)(x+2)}}$ $\left[\begin{array}{l} Faktoriseer\ al\ die\ tellers\ en\ noemers \\ en\ kanselleer\ gemene\ faktore \end{array}\right]$

$= \underline{\frac{1}{x-3}}$

Voorbeeld 16

Vereenvoudig:

a) $\frac{x^2-3x-4}{3x^2-12x}$ b) $\frac{x(3a-b)+y(3a-b)}{9a^2(x+y)-b^2(x+y)}$

Oplossing

a) $\frac{x^2-3x-4}{3x^2-12x}$

$= \frac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{3x\cancel{(x-4)}}$ $\left[\begin{array}{l} Faktoriseer\ teller\ en\ noemer; \\ kanselleer\ gemene\ faktor (x-4) \end{array}\right]$

$= \frac{(x+1)}{3x}$

b) $\frac{x(3a-b)+y(3a-b)}{9a^2(x+y)-b^2(x+y)}$

$= \frac{(3a-b)(x+y)}{(x+y)(9a^2-b^2)}$ $\left[\begin{array}{l} Faktoriseer\ teller\ en\ noemer; \\ Let\ op\text{: } 9a^2-b^2\ het\ nog\ faktore \end{array}\right]$

$= \frac{\cancel{(3a-b)}\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}\cancel{(3a-b)}(3a+b)}$ $\left[\begin{array}{l} Faktoriseer\ noemer\ volledig\ en \\ kanselleer\ gemene\ faktore \end{array}\right]$

$= \frac{1}{(3a+b)}$

Vermenigvuldig tweetem met tweeterm:

$(x-2y)(3x-y) = 3x^2 - xy - 6xy + 2y^2$

$\underline{= 3x^2 - 7xy + 2y^2}$

Kwadreer 'n tweeterm:

Onthou!

$(2x-y)^2 = (2x-y)(2x-y)$ $\left[\begin{array}{l} (2x-y)^2 \neq 4x^2 - y^2\ maar \\ (2x-y)^2 = (2x-y)(2x-y) \end{array}\right]$

$= 4x^2 - 2xy - 2xy + y^2$

$\underline{= 4x^2 - 4xy + y^2}$

FAKTORISERING

Gemeenskaplike faktor: $2x^2 - x$

$= x(2x-1)$ $[Gemene\ faktor \to x]$

Gemeenskaplike hakie: $2x(x-y) - y(x-y)$

$= (x-y)(2x-y)$ $[Gemene\ faktor \to (x-y)]$

Omruiling: $x(x-y) + 3y(y-x)$

$= x(x-y) - 3y(x-y)$ $\left[\begin{array}{l} +\ tussen\ hakies\ word -, \\ (y-x) word\ (x-y) \end{array}\right]$

$= (x-y)(x-3y)$ $[Gemene\ faktor \to (x-y)]$

Verskil tussen twee vierkante

* Die uitdrukking bestaan uit slegs twee terme
* Die terme word geskei deur 'n minusteken
* Elke term is 'n volkome vierkant.

$x^2 - 9y^2 \underline{= (x-3y)(x+3y)}$ $[(\sqrt{x^2} - \sqrt{9y^2})(\sqrt{x^2} - \sqrt{9y^2})]$

$(x-y)^2 - 25 = [(x-y)-5][(x-y)+25]$

$\underline{= (x-y-5)(x-y+5)}$

Die som van twee vierkante, bv. $x^2 + y^2$, kan nie gefaktoriseer word nie.

Drieterm

$x^2 + 8x + 15$ $\left[\begin{array}{l} Laaste\ term +, tekens\ deselfde; \\ middel\ term +,\ \ albei\ tekens + \end{array}\right]$

$\underline{= (x+3)(x+5)}$ $[3 \times 5 = 15\ en\ 3 + 5 = 8]$

$x^2 - 9x + 18$ $\left[\begin{array}{l} Laaste\ term +, tekens\ deselfde; \\ middel\ term -,\ \ albei\ tekens - \end{array}\right]$

$\underline{= (x-3)(x-6)}$ $[-3 \times -6 = -18\ en -3 - 6 = -9]$

$x^2 - 5x - 14$ $[Laaste\ term +,\ tekens\ verskil]$

$\underline{= (x+2)(x-7)}$ $[2 \times -7 = -14\ en\ 2 - 7 = -5]$